



第1章 导数及其应用

1.1 导数概念及其意义

1.1.1 函数的平均变化率+

1.1.2 瞬时变化率与导数+

1.1.3 导数的几何意义

易错记

1-1. B 【解析】 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3-\Delta x)}{\Delta x} =$

$$2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3-\Delta x)}{2\Delta x} = 2f'(3) = -6,$$

$f'(3) = -3$. 故选 B.

2-1. $3x-y-2=0$ 或 $3x-4y+1=0$ 【解析】将 $x=1$ 代入曲线 C 的方

程得 $y=1$, 所以切点 $P(1,1)$.

又 $y'|_{x=1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1+\Delta x)^3 - 1}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3+3\Delta x+(\Delta x)^2] = 3, \text{ 所以曲线 } C \text{ 在}$$

$x=1$ 处的切线斜率 $k=3$,

则曲线 C 在点 $P(1,1)$ 处的切线方程为

$$y-1=3(x-1), \text{ 即 } 3x-y-2=0.$$

设切点为 $Q(x_0, y_0)$, 则 $y'|_{x=x_0} = 3x_0^2$, 由

题意可知 $k_{PQ} = y'|_{x=x_0}$, 又 $y_0 = x_0^3$, 则切线

方程为 $y-x_0^3 = 3x_0^2(x-x_0)$, 将点 $(1,1)$ 代

入, 得 $1-x_0^3 = 3x_0^2(1-x_0)$, 即 $(x_0-$

$$1)^2(2x_0+1)=0, \text{ 解得 } x_0=1 \text{ 或 } x_0=-\frac{1}{2}.$$

当 $x_0=1$ 时, 切点坐标为 $(1,1)$, 相应的

切线方程为 $3x-y-2=0$;

当 $x_0 = -\frac{1}{2}$ 时, 切点坐标为 $\left(-\frac{1}{2},\right.$

$$\left.-\frac{1}{8}\right), \text{ 相应的切线方程为 } y+\frac{1}{8}=$$

$$\frac{3}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right), \text{ 即 } 3x-4y+1=0.$$

综上, 切线方程为 $3x-y-2=0$ 或 $3x-4y+$

$1=0$.



题型诀

1-1. B 【解析】根据平均速度定义可知,质点在 $t \in [2, 3]$ 内的平均速度 $v_1 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3^2 + 2 \times 3 - 2^2 - 2 \times 2}{3 - 2} = 7$;

质点在 $t = 3$ 时的瞬时速度 $v_2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(3 + \Delta t)^2 + 2 \times (3 + \Delta t) - 3^2 - 2 \times 3}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (8 + \Delta t) = 8$, 所以 $\frac{v_1}{v_2} = \frac{7}{8}$. 故选 B.

1-2. 【解】质点 M 在 $t = 2$ s 时的瞬时速度 $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(2 + \Delta t) - s(2)}{\Delta t}$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \times (2 + \Delta t)^2 + 3 - 2 \times 2^2 - 3}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2\Delta t + 8) = 8 \text{ (cm/s)},$$

在 $[1, 3]$ 上的平均速度 $\bar{v} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{2 \times 3^2 + 3 - (2 \times 1^2 + 3)}{2} = 8 \text{ (cm/s)}.$

1-3. 【解】(1) $h(0)$ 表示飞机起飞前的高度;

$h(1)$ 表示飞机起飞后第 1 s 时的高度;

$h(2)$ 表示飞机起飞后第 2 s 时的高度.

(2) $h(2) = 254, h(1) = 84, \therefore$ 飞机起飞后第 2 s 内的平均速度 $\bar{v} = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = \frac{254 - 84}{1} = 170 \text{ (m/s)}.$

(3) 第 2 s 末的瞬时速度为

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(2 + \Delta t) - h(2)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{5(2 + \Delta t)^3 + 30(2 + \Delta t)^2 + 45(2 + \Delta t) + 4 - (5 \times 2^3 + 30 \times 2^2 + 45 \times 2 + 4)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{5(\Delta t)^3 + 60(\Delta t)^2 + 225\Delta t}{\Delta t} \\ &= 225 \text{ (m/s)}. \end{aligned}$$

\therefore 第 2 s 末的瞬时速度为 225 m/s.

2-1. A 【解析】根据平均变化率的定义可

$$\text{得 } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(2)}{2} = \frac{16 + \frac{1}{4} - 4 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{47}{8}. \text{ 故}$$



选 A.

2-2. D 【解析】根据题意, 函数 $y = x^2 - 1$

在区间 $[1, m]$ 上的平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$\frac{m^2 - 1 - (1^2 - 1)}{m - 1} = m + 1,$$

则有 $m + 1 = 3$, 解得 $m = 2$. 故选 D.

2-3. C 【解析】记 $v_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \tan \alpha_1$, $v_2 =$

$\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} = \tan \alpha_2$, 由图易知 $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$, 所

以 $v_1 < v_2$. 故选 C.

2-4. 【解】当自变量从 x_0 变化到 $x_0 +$

Δx 时, 函数的平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$\frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2,$$

当 $x_0 = 1$, $\Delta x = \frac{1}{2}$ 时平均变化率的值为

$$3 \times 1^2 + 3 \times 1 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{19}{4}.$$

3-1. B 【解析】由题图可知, 函数 $f(x)$

在 $x \in [1, 2]$ 上的增长速度越来越快, 故

$f(x)$ 在 $x \in [1, 2]$ 上图象的切线的斜率

越来越大. 又 $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = a$,

所以 $f'(1) < a < f'(2)$.

3-2. A 【解析】 $\because \Delta y = (2 + \Delta x)^3 - 3(2 +$

$\Delta x) - 2^3 + 6 = 9\Delta x + 6(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, $\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2$, $\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [9 + 6\Delta x +$

$(\Delta x)^2] = 9$,

由导数的几何意义可知, 曲线 $y = x^3 - 3x$

在点 $(2, 2)$ 处的切线斜率是 9. 故选 A.

3-3. ACD 【解析】单位时间的供应量

逐步提高时, 供应量的增长速度越来越

快, 图象上切线的斜率随着自变量的增

加会越来越大, 则曲线是上升的, 且越来越

陡, 故函数的图象应一直是下凹的, 则

选项 B 满足条件,

所以在时间 $[0, T]$ 内供应效率(单位时



间的供应量) 不逐步提高的是 ACD 选项. 故选 ACD.

4-1. B 【解析】 $\because f'(x)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{f(x+d) - f(x)}{d} \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{(x+d)^3 + a(x+d) - x^3 - ax}{d} \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} [3x^2 + a + 3x \cdot d + d^2] \\ &= 3x^2 + a. \end{aligned}$$

又曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $x+4y=0$ 垂直,

$$\therefore f'(1) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = (3+a) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1,$$

解得 $a=1$. 故选 B.

4-2. $\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{8}\right)$ 【解析】设切点坐标为

(x_0, y_0) ,

$$\text{则 } \Delta y = [2(x_0 + \Delta x)^2 + 1] - (2x_0^2 + 1) =$$

$$4x_0 \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2, \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x_0 + 2\Delta x,$$

$$\therefore f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x_0.$$

又 \because 切线的斜率为 $k = \tan 45^\circ = 1$,

$$\therefore 4x_0 = 1, \text{ 即 } x_0 = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore y_0 = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 = \frac{9}{8},$$

$$\therefore \text{切点坐标为 } \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{8}\right).$$

4-3. -1 【解析】 \because 函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $P(2, f(2))$ 处的切线方程为 $y = -2x + 5$,

$$\therefore f'(2) = -2, f(2) = -4 + 5 = 1,$$

$$\therefore f(2) + f'(2) = 1 + (-2) = -1.$$

4-4. 【解】 曲线 $f(x) = x^2 - 1$ 在 $x = x_0$ 处的

$$\text{切线斜率 } k_1 = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + d) - f(x_0)}{d} = 2x_0.$$

曲线 $g(x) = 1 - x^3$ 在 $x = x_0$ 处的切线斜率

$$k_2 = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + d) - g(x_0)}{d} = -3x_0^2.$$

由题意得 $2x_0 = -3x_0^2$, 解得 $x_0 = 0$ 或 $x_0 =$



$-\frac{2}{3}$. 经检验, 所求的两个解均符合

题意.

5-1. C 【解析】 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{-2}{1+\Delta x} + 2}{\Delta x} = \frac{2}{1+\Delta x}$, 所

以 $f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{1+\Delta x} = 2$, 所以曲线

$f(x)$ 在点 M 处的切线方程为 $y+2=2(x-1)$,

即 $y=2x-4$. 故选 C.

5-2. $y=13x$ 【解析】设切点坐标为 (x_0, y_0) , 则直线 l 的斜率 $k=f'(x_0)=$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0+\Delta x)^3+x_0+\Delta x-16-x_0^3-x_0+16}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(\Delta x)^2+3x_0^2+3x_0\Delta x+1]$$

$$= 3x_0^2+1,$$

所以直线 l 的方程为 $y-y_0=(3x_0^2+1)(x-x_0)$, 即 $y=(3x_0^2+1)(x-x_0)+x_0^3+x_0-16$. 又

直线 l 过原点 $(0,0)$, 所以 $(3x_0^2+1)(0-x_0)+x_0^3+x_0-16=0$, 整理得 $x_0^3=-8$, 解得

$x_0=-2$, 所以直线 l 的斜率为 13, 所以直线 l 的方程为 $y=13x$.

5-3. 【解】 (1) $\because A(2,4)$ 在曲线 $y=f(x)=x^2$ 上, 由 $y=f(x)=x^2$ 得,

$$y' = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{f(x+d)-f(x)}{d} = 2x,$$

$\therefore f'(2)=4$. \therefore 切线方程为 $y-4=4(x-2)$, 即 $4x-y-4=0$.

(2) 设切点坐标为 (x_0, x_0^2) .

由 (1) 得 $y'=2x$, $\therefore f'(x_0)=2x_0$.

\therefore 切线方程为 $y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$.

\because 点 $(3,5)$ 在切线上, $\therefore 5-x_0^2=2x_0(3-x_0)$, 即 $x_0^2-6x_0+5=0$.

解得 $x_0=1$ 或 $x_0=5$, \therefore 过点 $B(3,5)$ 且与曲线相切的切线有两条, \therefore 切线方程为



$$2x - y - 1 = 0 \text{ 或 } 10x - y - 25 = 0.$$

巩固练

1. **B** 【解析】 \because 当 $x \in [1, 1 + \Delta x]$ 时,

$$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = (\Delta x + 1)^2 - 1^2 =$$

$$(\Delta x)^2 + 2\Delta x, \therefore \text{函数 } f(x) = x^2 \text{ 在 } x \in$$

$$[1, 1 + \Delta x] \text{ 区间内的平均变化率 } \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\Delta x + 2. \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2 \in (2, 2.025),$$

$$\therefore \Delta x \in (0, 0.025), \text{ 故选 B.}$$

2. **B** 【解析】 $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2ax + a\Delta x) = 2ax,$$

$$\text{所以 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a) =$$

$$2a^2 = 4, \text{ 解得 } a = \pm\sqrt{2}.$$

又因为 $f(x)$ 的图象开口向下, 所以 $a <$

$$0, \text{ 所以 } a = -\sqrt{2}. \text{ 故选 B.}$$

3. **B** 【解析】因为 $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3(3 + \Delta t)^2 - 3 \times 3^2}{\Delta t} =$

$$\frac{18\Delta t + 3(\Delta t)^2}{\Delta t} = 18 + 3\Delta t,$$

$$\text{所以 } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 18. \text{ 故选 B.}$$

4. **D** 【解析】 $\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(m + \Delta x) - f(m)}{\Delta x} =$

$$\frac{\frac{2}{m + \Delta x} - \frac{2}{m}}{\Delta x} = \frac{-2}{m(m + \Delta x)},$$

$$\therefore f'(m) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2}{m(m + \Delta x)} = -\frac{2}{m^2},$$

$$\therefore -\frac{2}{m^2} = -\frac{1}{2}, m^2 = 4,$$

$$\text{解得 } m = \pm 2.$$

5. **C** 【解析】函数 $f(x)$ 在区间上的平均

$$\text{变化率为 } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

$$\text{由题图可得, 在区间 } [4, 7] \text{ 上, } \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0,$$

即函数 $f(x)$ 在区间 $[4, 7]$ 上的平均变化率小于 0.

$$\text{在区间 } [1, 2], [2, 3], [3, 4] \text{ 上, } \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$$



且 Δx 相同, 由题图可知 Δy 在区间 $[3, 4]$ 上的变化最大, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 4]$ 上的平均变化率最大.

6. A 【解析】 设切点坐标为 (x_0, y_0) ,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

由题意可知, 切线斜率 $k=4$,

即 $f'(x_0) = 2x_0 = 4$, 所以 $x_0 = 2$.

所以切点坐标为 $(2, 4)$, 切线方程为 $y - 4 = 4(x - 2)$, 即 $4x - y - 4 = 0$. 故选 A.

7. A 【解析】 $f'(x) =$

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{(x+\Delta x)^3 - a(x+\Delta x)^2 - 8(x+\Delta x) - (x^3 - ax^2 - 8x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 - 2ax - a\Delta x - 8] \\ &= 3x^2 - 2ax - 8, \end{aligned}$$

由 $f'(x)$ 为偶函数得 $a=0$,

所以 $f'(x) = 3x^2 - 8$.

所以 $f(x)$ 的图象在点 $(2, f(2))$ 处的切线的斜率 $f'(2) = 4$.

又 $f(2) = -8$, 所以所求的切线方程为 $y + 8 = 4(x - 2)$, 即 $4x - y - 16 = 0$. 故选 A.

8. B 【解析】 $\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$

$$\frac{3(x_0 + \Delta x)^2 + 6(x_0 + \Delta x) + 1 - 3x_0^2 - 6x_0 - 1}{\Delta x} =$$

$$3\Delta x + 6x_0 + 6,$$

$$\therefore f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3\Delta x + 6x_0 + 6) =$$

$$6x_0 + 6 = 0, \therefore x_0 = -1. \text{ 把 } x = x_0 = -1 \text{ 代入}$$

$$f(x) = 3x^2 + 6x + 1, \text{ 得 } y_0 = -2.$$

\therefore 点 P 的坐标为 $(-1, -2)$.

9. B 【解析】 $\therefore f(x) = x^3 - \frac{1}{2}f'(1)x +$

$$f'(2), \therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{(x+\Delta x)^3 - \frac{1}{2}f'(1)(x+\Delta x) + f'(2)}{\Delta x} - \frac{x^3 - \frac{1}{2}f'(1)x + f'(2)}{\Delta x} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[(\Delta x)^2 + 3x^2 + 3x\Delta x - \frac{1}{2}f'(1) \right]$$

$$= 3x^2 - \frac{1}{2}f'(1).$$

$$\therefore f'(1) = 3 - \frac{1}{2}f'(1), \therefore f'(1) = 2,$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 1 \geq -1,$$

$$\therefore \tan \alpha \geq -1, \therefore 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4} \leq \alpha < \pi.$$

故选 B.

10.2 【解析】由导数的定义,

$$\text{得 } f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(\Delta x)^2 + b(\Delta x) + c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [a(\Delta x) + b] = b > 0.$$

又 \because 对于任意实数 x , 有 $f(x) \geq 0$,

$$\therefore \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac \leq 0, \\ a > 0, \end{cases}$$

$$\therefore ac \geq \frac{b^2}{4}, a > 0, c > 0.$$

$$\therefore \frac{f(1)}{f'(0)} = \frac{a+b+c}{b} \geq \frac{b+2\sqrt{ac}}{b} \geq \frac{2b}{b} = 2,$$

当且仅当 $a=c=\frac{b}{2}$ 时等号成立.

11.4 【解析】设抛物线在点 P 处切线的斜率为 k , 则

$$k = y'|_{x=-2}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(-2+\Delta x)^2 - (-2+\Delta x) + c - (6+c)}{\Delta x}$$

$$= -5,$$

\therefore 抛物线在点 P 处的切线过坐标原点, \therefore 切线方程为 $y = -5x$.

\therefore 点 P 的纵坐标为 $-5 \times (-2) = 10$.

将点 $P(-2, 10)$ 代入 $y = x^2 - x + c$, 解得 $c = 4$.

12. 【解】令 $f(x) = \sqrt{x+1}$, 则



$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x+\Delta x+1 - (x+1)}{\Delta x (\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1})} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.
 \end{aligned}$$

13. ACD 【解析】因为 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$

表示物体在 t s 这一时刻的瞬时速度，

所以 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(3+\Delta t) - s(3)}{\Delta t}$ 表示物体在

3 s 这一时刻的瞬时速度，B 正确，故选 ACD.

1.2 导数的运算

1.2.1 几个基本函数的导数+

1.2.2 函数的和差积商求导法则+

1.2.3 简单复合函数的求导

易错记

1-1. A 【解析】因为 $f(x) = 3\ln x +$

$f'(1)x^2 - 5x$ ，所以 $f'(x) = \frac{3}{x} + 2f'(1)x - 5$ ，

所以 $f'(1) = 3 + 2f'(1) - 5$ ，故 $f'(1) = 2$ 。又

$f(1) = f'(1) - 5$ ，所以 $f(1) = -3$ ，故选 A.

1-2. $-\frac{4}{3}$ 【解析】因为 $f(x) = x^2 - 2x \cdot$

$f'(2)$ ，所以 $f'(x) = 2x - 2 \cdot f'(2)$ 。

令 $x=2$ ，得 $f'(2) = 4 - 2 \cdot f'(2)$ ，

解得 $f'(2) = \frac{4}{3}$ 。所以 $f(x) = x^2 - \frac{8}{3}x$ ，

所以 $f(2) = 4 - \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}$ 。

2-1. ABC 【解析】对于 A, $f'(x) = 0$ ，故

A 错误；

对于 B, $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2}$ ，故 B 错误；

对于 C, $f'(x) = 2^x \ln 2$ ，故 C 错误；



对于 D, $f'(x) = 2x$, 故 D 正确. 故选 ABC.

3-1. $ex - y = 0$ 【解析】 设切点坐标为 (m, n) . 因为 $y' = e^x$, 且切线过原点, 所以

$$\begin{cases} n = e^m, \\ \frac{n-0}{m-0} = e^m, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} n = e, \\ m = 1, \end{cases} \text{ 所以过原点且与}$$

曲线 $y = e^x$ 相切的直线方程是 $ex - y = 0$.

题型诀

1-1. AC 【解析】 对于 A, $(2^x)' = 2^x \ln 2$, A 错误;

对于 B, $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$, B 正确;

对于 C, $(\sin 1)' = 0$, C 错误;

对于 D, $(\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$, D 正确. 故选 AC.

1-2. C 【解析】 由题可知, $f'(x) = \frac{1}{x}$,
 $\therefore f'(1) = 1$. 故选 C.

1-3. B 【解析】 因为 $s = \frac{1}{4}t^2 + t$, 所以
 $s' = \frac{1}{2}t + 1$, 当 $t = 1$ 时, $s'|_{t=1} = \frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{3}{2}$, 所以当 $t = 1$ 时, 该质点的瞬时速度为 $\frac{3}{2}$ m/s. 故选 B.

2-1. C 【解析】 因为 $f'(x) = 2ax + \cos x$,
 所以 $f'(0) = 1$.
 故选 C.

2-2. BC 【解析】 对于 A, $\left(x + \frac{3}{x}\right)' = 1 - \frac{3}{x^2}$, 故 A 错误; 对于 B, $(\tan x)' = \frac{(\sin x)'}{(\cos x)'} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$, 故 B 正确;
 对于 C, $(e^x - \sqrt{x})' = e^x - (x^{\frac{1}{2}})' = e^x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 故 C 正确; 对于 D,
 $(x^2 \cos x)' = 2x \cos x - x^2 \sin x$, 故 D 错误.
 故选 BC.



2-3. C 【解析】因为 $f(x) = (x+2a) \cdot (x-a)^2 = (x+2a)(x^2-2ax+a^2) = x^3-3a^2x+2a^3$, 所以 $f'(x) = (x^3-3a^2x+2a^3)' = 3(x^2-a^2)$. 故选 C.

2-4. D 【解析】令 $g(x) = (x-a_1) \cdot (x-a_2) \cdot \cdots \cdot (x-a_8)$, 则 $f(x) = x \cdot g(x)$, 则 $f'(x) = (x)' \cdot g(x) + x \cdot g'(x) = g(x) + x \cdot g'(x)$.
 $\therefore f'(0) = g(0) = (-a_1) \cdot (-a_2) \cdot \cdots \cdot (-a_8) = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_8 = (a_1 a_8)^4 = 8^4 = 2^{12}$.

3-1. 8 【解析】由 $s = t^2 \cdot e^{t-2}$,

得 $s' = 2t \cdot e^{t-2} + t^2 \cdot e^{t-2}$,

当 $t=2$ 时, $s' = 2 \times 2 \times e^{2-2} + 2^2 \times e^{2-2} = 8$,

所以质点在 $t=2$ 的瞬时速度是 8.

3-2. 【解】 (1) $y' = 2(x^2-4)(x^2-4)' = 2(x^2-4) \cdot 2x = 4x^3 - 16x$.

(2) $y' = \frac{1}{6x+4} \cdot (6x+4)' = \frac{3}{3x+2}$.

(3) $y' = (10^{3x-2} \ln 10) \cdot (3x-2)' = 3 \times 10^{3x-2} \times \ln 10 = 3 \ln 10 \times 10^{3x-2}$.

(4) $y' = \frac{1}{2\sqrt{2x-1}} \cdot (2x-1)' = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = (2x-1)^{-\frac{1}{2}}$.

(5) $y' = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(3x - \frac{\pi}{4}\right)' = 3\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

(6) $y' = 2\cos x \cdot (\cos x)' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x$.

4-1. C 【解析】由 $y = \ln(x+1) + 2ax$ 得,

$y' = \frac{1}{x+1} + 2a$, 又切线 $2x - y = 0$ 的斜率为

2, 则 $y'|_{x=0} = \frac{1}{0+1} + 2a = 2$, 解得 $a = \frac{1}{2}$, 故

选 C.

4-2. BD 【解析】直线 $y = x + b$ 的斜率为 1, 根据导数的几何意义, 判断选项中的导数值是否可以为 1.



A 选项中, 令 $y' = -\frac{1}{x^2} + 1 = 1$, 方程无解,

故 A 不正确;

B 选项中, 令 $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 1$, 解得 $x = 1$, 故

B 正确;

C 选项中, 令 $y' = -3x^2 + 2x = 1$, 即 $3x^2 - 2x + 1 = 0$, $\Delta < 0$, 方程无解, 故 C 不正确;

D 选项中, 令 $y' = e^x - 1 = 1$, 解得 $x = \ln 2$, 故 D 正确.

故选 BD.

4-3. $5x - y + 2 = 0$ 【解析】由 $y = \frac{2x-1}{x+2} =$

$\frac{2(x+2)-5}{x+2} = 2 - \frac{5}{x+2}$, 得 $y' = \frac{5}{(x+2)^2}$, 所以

切线的斜率 $k = y'|_{x=-1} = 5$, 所以切线方程为 $y+3=5(x+1)$,

即 $5x - y + 2 = 0$.

4-4. 3 或 -1 【解析】因为 $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$, 所以 $f(-1) = 1$, $f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$.

当点 $(-1, 1)$ 为切点时, $k_l = f'(-1) = 3$.

当点 $(-1, 1)$ 不为切点时, 设切点为 $(a, a^3 - a^2 - 2a + 1)$, $a \neq -1$,

所以 $k_l = f'(a) = 3a^2 - 2a - 2$,

所以切线方程为 $y - (a^3 - a^2 - 2a + 1) = (3a^2 - 2a - 2)(x - a)$.

因为切线过点 $(-1, 1)$, 所以 $1 - (a^3 - a^2 - 2a + 1) = (3a^2 - 2a - 2)(-1 - a)$, 即 $a^3 + a^2 - a - 1 = 0$, 即 $(a+1)(a^2 - 1) = 0$, 解得 $a = 1$ 或 $a = -1$ (舍去),

所以切点为 $(1, -1)$, 所以 $k_l = f'(1) = -1$.

综上所述, 直线 l 的斜率为 3 或 -1.

4-5. $y = -x$ 【解析】因为函数 $f(x)$ 为奇

函数, 所以 $f(-x) = (a-1)x^2 + a\sin x = -f(x) = -(a-1)x^2 + a\sin x$, 所以 $a-1=0$,

解得 $a = 1$, 所以 $f(x) = -\sin x$, 则

$f'(x) = -\cos x$, $f'(0) = -1$. 由导数的几何

意义可知曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切

线斜率为 -1, 所以切线方程为 $y = -x$.



5-1. AB 【解析】由题意可得, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

因为点 $O(0,0)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上, 所以当点 $O(0,0)$ 为切点时, $f'(0) = 2$, 故直线 l 的方程为 $y=2x$.

又直线 l 与曲线 $y=x^2+a$ 相切, 所以 $x^2+a-2x=0$ 满足 $\Delta=4-4a=0$, 解得 $a=1$.

当点 $O(0,0)$ 不是切点时, 设切点为 $(x_0, x_0^3-3x_0^2+2x_0)$ ($x_0 \neq 0$), 则 $f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 + 2$, 所以

$\frac{x_0^3-3x_0^2+2x_0}{x_0} = 3x_0^2 - 6x_0 + 2$, 解得 $x_0 = \frac{3}{2}$, 所以 $f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, 所以直线

l 的方程为 $y = -\frac{1}{4}x$.

由 $\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x, \\ y = x^2 + a, \end{cases}$ 得 $x^2 + \frac{1}{4}x + a = 0$, 由题意得

$\Delta = \frac{1}{16} - 4a = 0$, 解得 $a = \frac{1}{64}$.

综上, $a=1$ 或 $a=\frac{1}{64}$. 故选 AB.

5-2. $3x-y-9=0$ 【解析】设公共点为 (x_0, y_0) .

由 $y = \ln(3x-8)$ ($x > \frac{8}{3}$) 得 $y' = \frac{3}{3x-8}$.

由 $y = x^2 - 3x$ 得 $y' = 2x - 3$,

所以 $\frac{3}{3x_0-8} = 2x_0 - 3$, 解得 $x_0 = 3$ 或 $x_0 = \frac{7}{6}$

(舍去),

所以 $y_0 = 0$, $y'|_{x=x_0} = \frac{3}{9-8} = 3$,

故所求切线的方程为 $y-0=3(x-3)$,

即 $3x-y-9=0$.

5-3. 【证明】 设 $P(x_0, y_0)$ 为曲线 $xy = a^2$

上任一点, 则 $y_0 = \frac{a^2}{x_0}$.

$\therefore y' = \left(\frac{a^2}{x}\right)' = -\frac{a^2}{x^2}$, $y'|_{x=x_0} = -\frac{a^2}{x_0^2}$,

\therefore 曲线在点 P 处的切线方程为 $y-y_0 =$

$-\frac{a^2}{x_0^2} \cdot (x-x_0)$.



令 $x=0$, 得 $y=\frac{2a^2}{x_0}$;

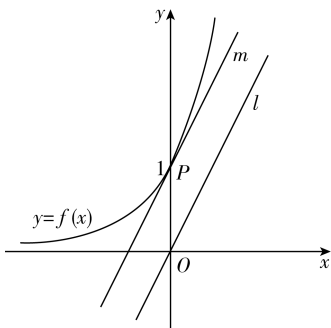
令 $y=0$, 得 $x=2x_0$.

\therefore 切线与两坐标轴围成的三角形的面积

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{2a^2}{x_0} \right| \cdot |2x_0| = 2a^2,$$

即曲线 $xy=a^2$ 在其上任意一点处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积等于常数 $2a^2$.

6-1. A 【解析】如图, 设直线 m 平行于直线 l , 则直线 m 的斜率为 2. 当直线 m 与函数 $f(x)$ 的图象相切, 点 P 为切点时, 点 P 到直线 $l: y=2x$ 的距离最小, 设切点 P 的坐标为 (x_0, y_0) .



因为 $f'(x) = 2e^{2x}$, 所以 $f'(x_0) = 2e^{2x_0} = 2$,

解得 $x_0 = 0$, 又 (x_0, y_0) 在函数 $f(x) = e^{2x}$

的图象上, 则 $y_0 = e^{2x_0} = 1$, 故切点坐标为 $(0, 1)$. 切点到直线 $l: 2x - y = 0$ 的距离

$$d = \frac{|2 \times 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

则点 P 到直线 $l: y=2x$ 的距离的最小值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 A.

6-2. D 【解析】由 $x_1^2 - \ln x_1 - y_1 = 0$, 得

$y_1 = x_1^2 - \ln x_1$, 又 $x_2 - y_2 - 4 = 0$, 则 $(x_1 -$

$x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ 的最小值可转化为曲线

$y = x^2 - \ln x (x > 0)$ 上的点与直线 $x - y - 4 = 0$

上的点的距离的平方的最小值.

由 $y = x^2 - \ln x$, 得 $y' = 2x - \frac{1}{x}$.

又与直线 $x - y - 4 = 0$ 平行的直线的斜率

为 1,

\therefore 令 $2x - \frac{1}{x} = 1$, 解得 $x = 1$ 或 $x = -\frac{1}{2}$



(舍), 可得切点为 $(1, 1)$ 时切线与直线 $x - y - 4 = 0$ 平行,

则点 $(1, 1)$ 到直线 $x - y - 4 = 0$ 的距离的平方, 即为 $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ 的最小值,

$\therefore (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ 的最小值为

$$\left(\frac{|-4|}{\sqrt{1+1}} \right)^2 = 8. \text{ 故选 D.}$$

7-1. D 【解析】函数 $f(x) = \ln x +$

$f'(1)x^2 + f(1)x + 2$, 则 $f(1) = f'(1) +$

$f(1) + 2$, 解得 $f'(1) = -2$, 所以 $f(x) =$

$\ln x - 2x^2 + f(1)x + 2$, 所以 $f'(x) = \frac{1}{x} - 4x +$

$f(1)$, 所以 $f'(1) = 1 - 4 + f(1) = -2$, 解得

$f(1) = 1$, 所以 $f(x) = \ln x - 2x^2 + x + 2$, 所以

$f(e) = 1 - 2e^2 + e + 2 = -2e^2 + e + 3$. 故选 D.

7-2. 0 【解析】 $\because f'(x) = 2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)x -$

$\cos x$,

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)(\pi - 1) = 0,$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

巩固练

1. D 【解析】由求导公式及导数运算法

则易知, D 选项中 $f'(x) = (1 - 2x^2)' =$

$-4x$ 与 $g'(x) = (-2x^2 + 3)' = -4x$ 相

同. 故选 D.

2. A 【解析】由函数 $f(x) = \log_a x$, 得

$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$. 因为 $f'(1) = 1$, 所以

$$\frac{1}{\ln a} = 1, \text{ 即 } a = e.$$

3. B 【解析】由 $f(x) = x^2$, 得 $f'(x) = 2x$,

则 $f'(1) = 2$.

因为 $f(1) = 1$, 所以曲线 $f(x) = x^2$ 在 $x =$

1 处的切线方程为 $y - 1 = 2(x - 1)$, 即

$y = 2x - 1$.

设直线 $y = 2x - 1$ 与曲线 $g(x) = \frac{e^x}{a}$ 相切



于点 (x_0, y_0) , 又 $g'(x) = \frac{e^x}{a}$,

$$\text{所以} \begin{cases} g'(x_0) = \frac{e^{x_0}}{a} = 2, \\ y_0 = g(x_0) = \frac{e^{x_0}}{a} = 2x_0 - 1, \end{cases}$$

解得 $x_0 = \frac{3}{2}, a = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} = \frac{e\sqrt{e}}{2}$. 故选 B.

4. **B** 【解析】因为 $f(x) = \frac{e^x}{x+1} + f'(1)x^2$, 所

以 $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2} + 2xf'(1)$. 令 $x=1$,

得 $f'(1) = \frac{e}{4} + 2f'(1)$, 则 $f'(1) =$

$-\frac{e}{4}$, 所以 $f(x) = \frac{e^x}{x+1} - \frac{e}{4}x^2$, 所以

$f(1) = \frac{e}{2} - \frac{e}{4} = \frac{e}{4}$. 故选 B.

5. **B** 【解析】由题意得 $f(x)$ 的定义域为

$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. 因为 $f(x) =$

$\cos \omega x + a \ln |x| + bx^2 + c = f(-x)$, 所以

$f(x)$ 为偶函数. 将 $f(x) = f(-x)$ 两边同

时求导得 $f'(x) = -f'(-x)$, 所以

$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}$. 故选 B.

6. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 【解析】 $\because (\sin x)' =$

$\cos x$, \therefore 直线 l 的斜率 $k = \cos x$,

$\therefore -1 \leq k \leq 1$, 即 $-1 \leq \tan \alpha \leq 1$,

$\therefore \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$.

7. **B** 【解析】对 $y = x^{n+1} (n \in \mathbf{N}_+)$ 求导得

$y' = (n+1) \cdot x^n$.

令 $x=1$, 得曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线的

斜率 $k = n+1$,

\therefore 曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $y -$

$1 = (n+1)(x-1)$.

令 $y=0$, 得 $x_n = \frac{n}{n+1}$,

$\therefore x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot$

$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. 故选 B.



8. C 【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + x \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot x} = 2, \text{ 当且仅当 } x=1 \text{ 时等号成立, 故曲线 } y=f(x) \text{ 在点 } P \text{ 处的切线的斜率的最小值为 } 2.$$

故选 C.

9. B 【解析】 $\because y=e^{x+1}$ 与 $y=-1+\ln x$ 互为反函数, 其图象关于直线 $y=x$ 对称

(提示: 反函数的性质), \therefore 先求出曲线

$y=e^{x+1}$ 上的点到直线 $y=x$ 的最小距离.

设与直线 $y=x$ 平行的直线与曲线

$y=e^{x+1}$ 相切于点 $P(x_0, y_0)$. $\because y'=e^{x+1}$,

$\therefore e^{x_0+1} = 1$, 解得 $x_0 = -1$. $\therefore y_0 = e^{-1+1} =$

1 , \therefore 切点 P 的坐标为 $(-1, 1)$. \because 点 P

到直线 $y=x$ 的距离 $d = \frac{|-1-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

$\therefore |PQ|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$. 故选 B.

10. A 【解析】设 $f(x) = e^x$, 则 $f'(x) =$

e^x . 由于 $\frac{1}{1\,000}$ 与 0 比较接近, 所以需要

求出曲线 $y=e^x$ 在点 $x=0$ 处的切

线方程. 又 $f(0) = 1, f'(0) = 1$, 所以

切线方程为 $y=g(x) = x+1$. 在切点附

近用切线代替曲线进行近似计算,

$$e^{\frac{1}{1\,000}} = f\left(\frac{1}{1\,000}\right) \approx g\left(\frac{1}{1\,000}\right) = 1 +$$

$$\frac{1}{1\,000} = 1.001. \text{ 故选 A.}$$

11. 1 -1 【解析】由 $f'(x) = 2x - \frac{a}{x}$,

$f'(1) = 2-a, f(1) = 1$, 得曲线 $y=f(x)$

在点 P 处的切线方程为 $y-1 = (2-$

$a)(x-1)$, 即 $y = (2-a)x + a - 1$, 代入

原点 $(0, 0)$, 得 $0 = a - 1$, 解得 $a = 1$, 故

实数 a 的值为 1.

由 $a = 1$ 可知直线 l 的方程为 $y = x$, 方

$$\text{程组} \begin{cases} y = -x^2 + mx + m, \\ y = x, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 整理得}$$

$$x^2 + (1-m)x - m = 0, \text{ 则 } \Delta = (1-m)^2 +$$



$4m=0$, 解得 $m=-1$.

12. 64 【解析】 $\because y=x^{-\frac{1}{2}}, \therefore y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

\therefore 曲线在点 $(a, a^{-\frac{1}{2}})$ 处的切线斜率

$$k=y'|_{x=a}=-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}},$$

\therefore 切线方程为 $y-a^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}} \cdot (x-a)$.

令 $x=0$, 得 $y=\frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}$;

令 $y=0$, 得 $x=3a$.

由 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 知 $a>0$, \therefore 该切线与两坐标轴围成的三角

形的面积为 $\frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}} =$

$$\frac{9}{4}a^{\frac{1}{2}}=18, \therefore a=64.$$

13. ABC 【解析】 对于 A, $(x^2+\log_3 x)' =$

$$(x^2)' + (\log_3 x)' = 2x + \frac{1}{x \ln 3}, \text{ 故 A}$$

正确;

$$\text{对于 B, } \left(\frac{\cos x}{x}\right)' = \frac{(\cos x)'x - x'\cos x}{x^2} = \\ -\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\text{对于 C, } (x^3 e^x)' = (x^3)' \cdot e^x + (e^x)' \cdot$$

$$x^3 = 3x^2 e^x + x^3 e^x = (3x^2 + x^3) \cdot e^x, \text{ 故 C}$$

正确;

$$\text{对于 D, } (x \cos 2x)' = x' \cos 2x +$$

$$(\cos 2x)'x = \cos 2x - 2x \sin 2x, \text{ 故 D 错}$$

误. 故选 ABC.

1.3 导数在研究函数中的应用

1.3.1 函数的单调性与导数

易错记

1-1. C 【解析】 由题意得 $x>0, f'(x)=$

$$2x-4-\frac{6}{x} = \frac{2}{x}(x+1) \cdot (x-3), \text{ 令}$$

$f'(x)>0$, 结合 $x>0$, 得 $x \in (3, +\infty)$, 即



函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(3, +\infty)$.

故选 C.

2-1. C 【解析】由 $f(x) = e^x(x^2 + a)$, 得 $f'(x) = e^x(x^2 + 2x + a)$. 因为函数 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递减, 所以 $f'(x) = e^x(x^2 + 2x + a) \leq 0$ 在 $[-2, 2]$ 上恒成立, 即 $a \leq -x^2 - 2x$ 在 $[-2, 2]$ 上恒成立 (提示: 参变分离), 由于 $-x^2 - 2x = -(x+1)^2 + 1 \geq -8$, 则 $a \leq -8$. 当 $a = -8$ 时, $f'(x) = e^x(x^2 + 2x - 8) = e^x[(x+1)^2 - 9]$ 不恒为零 (提示: 注意检验), 所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -8]$.

2-2. 【解】 函数 $f(x) = ax^3 + 2x^2 - x - 1$ 的导函数 $f'(x) = 3ax^2 + 4x - 1$. 依题意有

$f'(x) \leq 0$ 恒成立, 故 $\begin{cases} a < 0, \\ 16 + 12a \leq 0, \end{cases}$ 解得

$a \leq -\frac{4}{3}$. 经检验, 当 $a = -\frac{4}{3}$ 时, 满足

$f'(x) = 0$ 的点为有限个, 从而实数 a 的

取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right]$.

题型诀

1-1. A 【解析】由 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow$

$f'(x) = x^2 + x = x(x+1)$, 令 $f'(x) > 0$, 解得

$x > 0$ 或 $x < -1$, 则 $f(x)$ 的单调递增区间是

$(-\infty, -1), (0, +\infty)$. 故选 A.

1-2. BC 【解析】由 $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0$,

$x > 0$ 且 $x \neq 1$, 得 $x = e$, 当 $x \in (0, 1) \cup (1,$

$e)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以函数 $f(x)$ 的单调递

减区间是 $(0, 1)$ 和 $(1, e)$, 当 $x \in (e, +\infty)$

时, $f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 的单调递增

区间是 $(e, +\infty)$. 故选 BC.

1-3. 【解】 由题可得 $f'(x) = e^x \cos x -$

$e^x \sin x = e^x(\cos x - \sin x) = \sqrt{2} e^x \cos \left(x +$

$\frac{\pi}{4}\right)$,



令 $f'(x) > 0$, 得 $-\frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$;

令 $f'(x) < 0$, 得 $-\pi < x < -\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{4} < x < \pi$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, 单调递减区间为 $\left(-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right)$ 和 $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$.

2-1. A 【解析】因为 $f(x) =$

$$\sqrt{1-(|x|-1)^2} \geq 0, g(x) = -3\sqrt{1-\sqrt{\frac{|x|}{2}}} \leq$$

0, 所以函数 $g(x)$ 的图象为“心形线”中 x 轴

及下方的部分. 由 $g(x) = -3\sqrt{1-\sqrt{\frac{|x|}{2}}}$, 得

$$1-\sqrt{\frac{|x|}{2}} \geq 0, \text{解得 } -2 \leq x \leq 2 \text{ (提示: 不要}$$

忘记定义域). 由题图可知函数 $g(x)$ 在

$(0, 2)$ 上单调递增, 可得 $g'(x) \geq 0$, 故排

除 BC. 又函数 $g(x)$ 在 $x > 0$ 时的图象的

切线斜率先减小后增大, 故函数 $g'(x)$ 的

值先减小后增大, 故只有 A 选项符合题

意, 故选 A.

2-2. A 【解析】因为 $f(x) = (x^2 - x - 1) \cdot$

e^{x+1} 定义域为 \mathbf{R} ,

$$f'(x) = (x^2 + x - 2)e^{x+1} = (x+2)(x-1)e^{x+1},$$

所以当 $-2 < x < 1$ 时 $f'(x) < 0$, 当 $x < -2$ 或

$x > 1$ 时 $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-2, 1)$ 上单调递减, 在

$(-\infty, -2)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 又

$f(0) = -e < 0$, 且 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) > 0$, 故符

合条件的函数图象为 A. 故选 A.

3-1. 【解】由题意得 $f(x)$ 定义域为 $(0,$

$$+\infty), f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax + (2a+1) =$$

$$\frac{(2ax+1)(x+1)}{x}.$$

当 $a \geq 0$ 时, $2ax+1 > 0, x+1 > 0$,

$\therefore f'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.



当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{2a}$,

\therefore 当 $x \in \left(0, -\frac{1}{2a}\right)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in$

$\left(-\frac{1}{2a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0, -\frac{1}{2a}\right)$ 上单调递增, 在

$\left(-\frac{1}{2a}, +\infty\right)$ 上单调递减.

综上所述, 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上

单调递增; 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, -\frac{1}{2a}\right)$

上单调递增, 在 $\left(-\frac{1}{2a}, +\infty\right)$ 上单调

递减.

3-2. 【解】(1) 由题意可得 $g'(x) = e^x +$

$xe^x = (x+1)e^x$, $g(0) = 0$.

函数 $g(x)$ 的图象在 $x=0$ 处切线的斜率

$k = g'(0) = 1$, 则切线方程为 $y = x$.

(2) 依题意可得 $f'(x) = e^x + xe^x - a(x +$

$1) = (x+1)(e^x - a)$.

当 $a \leq 0$ 时, $e^x - a > 0$. 由 $f'(x) > 0$, 得 $x+1 >$

0 , 即 $x > -1$, 由 $f'(x) < 0$, 得 $x+1 < 0$, 即

$x < -1$.

即函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 在

$(-\infty, -1)$ 上单调递减.

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -1$ 或

$x = \ln a$.

① 当 $\ln a = -1$, 即 $a = e^{-1}$ 时, $f'(x) \geq 0$, 且

$f'(x)$ 不恒为 0, 从而函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单

调递增;

② 当 $\ln a < -1$, 即 $0 < a < e^{-1}$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 $x > -1$ 或 $x < \ln a$, 由

$f'(x) < 0$, 得 $\ln a < x < -1$, 故函数 $f(x)$ 在

$(-1, +\infty)$ 和 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递增, 在

$(\ln a, -1)$ 上单调递减;

③ 当 $\ln a > -1$, 即 $a > e^{-1}$ 时,

由 $f'(x) > 0$, 得 $x > \ln a$ 或 $x < -1$, 由

$f'(x) < 0$, 得 $-1 < x < \ln a$,



故函数 $f(x)$ 在 $(-1, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-1, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-\infty, -1)$;

当 $0 < a < e^{-1}$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, \ln a)$, $(-1, +\infty)$, 单调递减区间是 $(\ln a, -1)$;

当 $a = e^{-1}$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, +\infty)$, 无单调递减区间;

当 $a > e^{-1}$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$, $(\ln a, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-1, \ln a)$.

4-1. C 【解析】因为函数 $f(x) = 2x + \frac{a}{x}$

$(a \in \mathbf{R})$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以

$$f'(x) = 2 - \frac{a}{x^2} \geq 0 \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

即 $a \leq 2x^2$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $a \leq 2$.

经检验, 当 $a = 2$ 时, 只有有限个点使 $f'(x) = 0$,

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$. 故选 C.

4-2. A 【解析】 \because 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,

\therefore 当 $x < 1$ 时, 有 $a > 1$.

$$\text{当 } x \geq 1 \text{ 时, } f'(x) = 2x - \frac{4}{x^2} + \frac{a}{x} =$$

$$\frac{2x^3 - 4 + ax}{x^2} \geq 0 \text{ 恒成立,}$$

令 $g(x) = 2x^3 + ax - 4, x \in [1, +\infty)$, 则

$$g'(x) = 6x^2 + a.$$

$\because a > 0, \therefore g'(x) > 0$, 即 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore g(x) \geq g(1) = 2 + a - 4 = a - 2.$$

要使当 $x \geq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 只需 $a - 2 \geq 0$, 解得 $a \geq 2$.

\because 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, \therefore 还需要



满足 $a \leq 1 + \frac{4}{1} + a \ln 1$,

即 $a \leq 5$. 综上, 实数 a 的取值范围是 $[2, 5]$. 故选 A.

4-3. BD 【解析】函数 $f(x)$ 在 $x \in$

$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 上有三个单调区间, 等价于方程

$f'(x) = 0$ 在 $x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 上有两个不同的

根. $f'(x) = \frac{(x-1)(ax+e^x)}{x^2}$, 令 $f'(x) = 0$,

则 $x=1$, 且 $ax+e^x=0$ 在 $x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 上有

唯一不为 1 的根, 即 $a = -\frac{e^x}{x}$ 在 $x \in$

$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 上有唯一不为 1 的根.

令 $g(x) = -\frac{e^x}{x}$, $x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, 则 $g'(x) =$

$-\frac{(x-1)e^x}{x^2}$, 故当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$,

$g(x)$ 单调递增,

当 $1 < x < 2$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

且 $g(1) = -e$, $g(2) = -\frac{e^2}{2}$, $g\left(\frac{1}{2}\right) =$

$-2\sqrt{e}$, 即 $a \in \left[-\frac{e^2}{2}, -2\sqrt{e}\right]$, 故选 BD.

4-4. 【解】方法一(直接法):

$f'(x) = x^2 - ax + a - 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x=1$ 或 $x=a-1$.

当 $a-1 \leq 1$, 即 $a \leq 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 不符合题意;

当 $a-1 > 1$, 即 $a > 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 和 $(a-1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, a-1)$ 上单调递减,

由题意知 $(1, 4) \subseteq (1, a-1)$ 且 $(6, +\infty) \subseteq (a-1, +\infty)$,

所以 $4 \leq a-1 \leq 6$, 即 $5 \leq a \leq 7$.

故实数 a 的取值范围为 $[5, 7]$.

方法二(数形结合法):

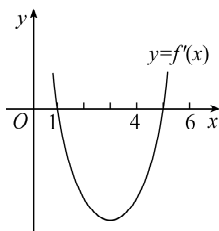
因为 $f'(x) = (x-1)[x-(a-1)]$, $x \in (-\infty, +\infty)$.



因为在 $(1, 4)$ 内, $f'(x) \leq 0$,

在 $(6, +\infty)$ 内, $f'(x) \geq 0$,

且 $f'(x) = 0$ 有一根为 1, 所以另一根在 $[4, 6]$ 上, 如图所示.



所以 $\begin{cases} f'(4) \leq 0, \\ f'(6) \geq 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 3 \times (5-a) \leq 0, \\ 5 \times (7-a) \geq 0, \end{cases}$ 所以

$$5 \leq a \leq 7.$$

故实数 a 的取值范围为 $[5, 7]$.

方法三 (转化为不等式的恒成立问题):

$$f'(x) = x^2 - ax + a - 1, x \in (-\infty, +\infty).$$

因为 $f(x)$ 在 $(1, 4)$ 上单调递减,

所以 $f'(x) \leq 0$ 在 $(1, 4)$ 上恒成立,

即 $a(x-1) \geq x^2 - 1$ 在 $(1, 4)$ 上恒成立, 所

以 $a \geq x+1$.

因为 $2 < x+1 < 5$,

所以当 $a \geq 5$ 时, $f'(x) \leq 0$ 在 $(1, 4)$ 上恒成立.

因为 $f(x)$ 在 $(6, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f'(x) \geq 0$ 在 $(6, +\infty)$ 上恒成立, 所

以 $a \leq x+1$.

因为 $x+1 > 7$, 所以当 $a \leq 7$ 时, $f'(x) \geq 0$

在 $(6, +\infty)$ 上恒成立.

综上知 $5 \leq a \leq 7$. 经检验 $a = 5$ 或 $a = 7$ 符

合题意, 故实数 a 的取值范围为 $[5, 7]$.

5-1. ABD 【解析】由 $f(x) = xe^x$, 得

$f'(x) = (x+1)e^x$, 所以当 $x > 0$ 时, $f'(x) >$

0, 故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立, 故 A 正确;

因为 $x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2) = x_1 x_2 e^{x_1} - x_1 x_2 e^{x_2} =$

$x_1 x_2 (e^{x_1} - e^{x_2})$, 由 $e^{x_1} < e^{x_2}$, $0 < x_1 < x_2$ 知,

$x_1 x_2 (e^{x_1} - e^{x_2}) < 0$, 即 $x_2 f(x_1) < x_1 f(x_2)$, 故

B 正确;



令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g'(x) = f'(x) - 1 = (x+1)e^x - 1 > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x_1) < g(x_2)$, 即 $f(x_1) - x_1 < f(x_2) - x_2$, 得 $f(x_1) + x_2 < f(x_2) + x_1$, 故 C 错误;

因为 $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) - 2x_2 f(x_1) = x_1 f(x_1) - x_2 f(x_1) + x_2 f(x_2) - x_2 f(x_1)$, 由 B 选项正确知, $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) - 2x_2 f(x_1) > x_1 f(x_1) - x_2 f(x_1) + x_2 f(x_2) - x_1 f(x_2) = (x_2 - x_1)[f(x_2) - f(x_1)]$, 由 $0 < x_1 < x_2$ 及 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增知, $(x_2 - x_1)[f(x_2) - f(x_1)] > 0$, 故有 $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) > 2x_2 f(x_1)$, 故 D 正确. 故选 ABD.

5-2. 【证明】 令 $f(x) = e^x - x - 1 (x \geq 0)$, 则 $f'(x) = e^x - 1 \geq 0$ 恒成立, 且只在 $x = 0$ 时, $f'(x) = 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

\therefore 对 $\forall x \in [0, +\infty)$, 有 $f(x) \geq f(0)$, 而 $f(0) = 0$,

$\therefore f(x) \geq 0$, 即 $e^x \geq x + 1 (x \geq 0)$.

令 $g(x) = x - \sin x (x \geq 0)$, 则 $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ 恒成立, 且 $g'(x)$ 不恒等于 0, $\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore g(x) \geq g(0) = 0$, 即 $x - \sin x \geq 0 (x \geq 0)$, $\therefore x + 1 \geq \sin x + 1 (x \geq 0)$.

综上, $e^x \geq x + 1 \geq \sin x + 1 (x \geq 0)$.

5-3. (1) 【解】 假设曲线 $y = f(x)$ 存在过原点的切线, 并设切点为 (m, km) .

由 $f(x) = \frac{e^x}{x} (x \neq 0)$, 得 $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

则 $\begin{cases} f(m) = \frac{e^m}{m} = km, \\ f'(m) = \frac{e^m(m-1)}{m^2} = k, \end{cases}$ 整理得 $e^m(m-1) = e^m$, 解得 $m = 2$, 则 $f(m) = \frac{e^2}{2}$,

所以曲线 $y = f(x)$ 存在过原点的切线, 且切点坐标为 $\left(2, \frac{e^2}{2}\right)$.



(2) 【证明】由题可知, $x > 0$, 要证明 $f(x) >$

$\frac{1}{2}x^2 \ln x$, 即证 $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{2}x^2 \ln x$, 即证

$$\frac{2e^x}{x^4} > \frac{\ln x}{x}.$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{2e^x}{x^4} (x > 0),$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{2e^x(x-4)}{x^5},$$

当 $x \in (0, 4)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 当 $x \in (4, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单

调递增, 则 $g(x)_{\min} = g(4) = \frac{2e^4}{4^4} = \frac{e^4}{128}$.

$$\text{令 } h(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0), \text{ 则 } h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

当 $x \in (0, e)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单

调递减, 则 $h(x)_{\max} = h(e) = \frac{1}{e}$.

因为 $e^5 > 128$, 所以 $\frac{e^4}{128} > \frac{e^4}{e^5} = \frac{1}{e}$, 因此

$$g(x)_{\min} > h(x)_{\max}, \text{ 所以 } f(x) > \frac{1}{2}x^2 \ln x.$$

6-1. B 【解析】令 $h(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则

$$h'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0, \text{ 所以函数 } h(x) \text{ 在}$$

区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $e^{-x}f(x^2+x) >$

$$e^{x^2-2}f(2) \Leftrightarrow \frac{f(x^2+x)}{e^{x^2+x}} > \frac{f(2)}{e^2} \Leftrightarrow h(x^2+x) >$$

$$h(2) \Leftrightarrow x^2+x > 2, \text{ 解得 } x < -2 \text{ 或 } x > 1, \text{ 即原}$$

不等式的解集为 $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$,

故选 B.

6-2. C 【解析】令 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 得

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}.$$

\therefore 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$,

$\therefore g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递

减. 又 $\log_2 5 > \log_2 4 = 2$, $1 < 2^{0.2} < 2$, $0 < 0.2^2 =$

$0.04 < 1$,

$\therefore \log_2 5 > 2^{0.2} > 0.2^2$, $\therefore g(\log_2 5) < g(2^{0.2}) <$



$g(0.2^2)$, 故 $c < a < b$.

6-3. A 【解析】令 $y = f(x) - \ln x$, 则 $y' =$

$$f'(x) - \frac{1}{x} = \frac{xf'(x) - 1}{x} (x > 0).$$

$\because xf'(x) < 1, \therefore y' < 0$,

即 $y = f(x) - \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore f(2) - \ln 2 < f(1) - \ln 1$, 即 $f(2) - f(1) < \ln 2$.

6-4. ABC 【解析】令 $f(x) = \ln(1+x) -$

$$\sin x \left(-1 < x < \frac{\pi}{2} \right), \text{ 则 } f'(x) = \frac{1}{x+1} - \cos x,$$

令 $g(x) = f'(x) \left(-1 < x < \frac{\pi}{2} \right)$, 则

$$g'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \sin x.$$

当 $-1 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $g'(x)$ 单调递增,

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+1\right)^2} + \sin \frac{\pi}{2} > 0,$$

$$g'(0) = -1 < 0,$$

所以存在 $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $g'(t) = 0$,

当 $x \in (-1, t)$ 时, $g'(x) < 0, g(x) = f'(x)$ 单调递减;

当 $x \in \left(t, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) > 0, g(x) = f'(x)$ 单调递增.

又 $f'(0) = 0, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+1} > 0$, 所以存

在 $m \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $f'(m) = 0$,

当 $x \in (-1, 0), \left(m, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x) > 0$,

$f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (0, m)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减.

$$\text{又 } f(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) - 1 < 0,$$

所以当 $-1 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) \leq 0$, 即 $\ln(1+x) \leq \sin x$, 当且仅当 $x=0$ 时取等号.



对于 A, 当 $x = \frac{1}{100}$ 时, 则有 $\ln\left(1 + \frac{1}{100}\right) < \sin \frac{1}{100}$, 故 A 正确.

对于 B, 当 $x = -\frac{1}{101}$ 时, 则有 $\ln\left(1 - \frac{1}{101}\right) < \sin\left(-\frac{1}{101}\right)$, 所以 $\ln \frac{100}{101} < -\sin \frac{1}{101}$, 即 $\ln \frac{101}{100} > \sin \frac{1}{101}$, 故 B 正确;

对于 C, 当 $x = \frac{3}{2}$ 时, 则有 $\ln\left(1 + \frac{3}{2}\right) < \sin \frac{3}{2}$, 即 $\ln \frac{5}{2} < \sin \frac{3}{2}$, 故 C 正确;

对于 D, $\ln \frac{7}{2} > 1 > \sin \frac{5}{2}$, 故 D 错误. 故选 ABC.

巩固练

1. **B** 【解析】对于 B, 当 $x > 0$ 时, $y' = e^x + xe^x = e^x(1+x) > 0$,

故 $y = xe^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 对

于 A, C, 由对称轴可知, 不符合题意;

对于 D, $y' = -1 + \frac{1}{x}$, 当 $0 < x < 1$ 时, $y' >$

0; 当 $x > 1$ 时, $y' < 0$, 不符合题意.

2. **C** 【解析】 $f'(x) = 1 - \cos x$, 因为当 $x \in (0, 2\pi)$ 时, $f'(x) = 1 - \cos x > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上单调递增, 故选 C.

3. **B** 【解析】由图象知 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 所以 $f'(x) < 0$ 的解集是 $(1, 2)$. 故选 B.

4. **A** 【解析】由函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象知, 对于选项 A, 当 $x \in (-3, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 故 A 正确;

对于选项 B, 当 $x \in (-3, 0)$ 时, $f'(x) <$

0, 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以函数

$f(x)$ 在 $(-3, 2)$ 上先单调递减, 再单调

递增, 故 B 错误;

对于选项 C, 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) >$



0, 函数 $f(x)$ 单调递增, 故 C 错误;

对于选项 D, 由选项 B 可知, 函数 $f(x)$ 在 $(-3, 2)$ 上先单调递减, 再单调递增, 不是单调函数, 故 D 错误. 故选 A.

5. **B** 【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{x-2x\ln x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}, \text{ 当 } x \in (0,$$

\sqrt{e}) 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当

$x \in (\sqrt{e}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

若 $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ 在子区间 $(a, a+1)$ 上不

是单调函数, 则
$$\begin{cases} 0 < a < \sqrt{e}, \\ a+1 > \sqrt{e}, \end{cases} \text{ 解得 } a \in$$

$(\sqrt{e}-1, \sqrt{e})$, 故选 B.

6. **$(-\infty, -1]$** 【解析】 $f'(x) =$

$$\frac{2x(x+1)-(x^2+a)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-a}{(x+1)^2}, x \in (-1,$$

$+\infty)$. $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增等

价于 $f'(x) \geq 0$, 且 $f'(x)$ 不恒为 0, 即

$x^2+2x-a \geq 0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上恒成立.

设 $g(x) = x^2+2x-a$, 则 $g(x)$ 的图象的对称轴为直线 $x=-1$, 且开口向上,

则 $g(x) = x^2+2x-a$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) > g(-1)$, 所以只需

$g(-1) \geq 0$, 即 $1-2-a \geq 0$,

解得 $a \leq -1$.

经检验, 当 $a = -1$ 时, 符合题意, 所以

实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -1]$.

7. **$(0, 2)$** 【解析】由 $f'(x) = x^2-4x+3$ 得

$$f'(x+1) = (x+1)^2-4(x+1)+3 = x^2-$$

$2x$. 令 $f'(x+1) < 0$, 解得 $0 < x < 2$, 所以

$f(x+1)$ 的单调递减区间是 $(0, 2)$.

8. **A** 【解析】令 $g(x) = e^{3x}f(x)$, 则

$$g'(x) = 3e^{3x}f(x) + e^{3x}f'(x) =$$

$e^{3x}[3f(x)+f'(x)] > 0$, 所以函数

$g(x) = e^{3x}f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增. 因为

$f(x) > e^{-3x}$ 可化为 $e^{3x}f(x) > 1$, 又



$g(0) = e^0 f(0) = 1$, 即 $g(x) > g(0)$, 则 $x > 0$, 所以不等式 $f(x) > e^{-3x}$ 的解集是 $(0, +\infty)$. 故选 A.

9. A 【解析】 令 $g(x) = f(x) \ln x$, 定义域为 $(0, +\infty)$, 则 $g'(x) = f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $\because g(1) = 0$, 且在 $(0, 1)$ 上, $\ln x < 0$, $g(x) > 0$, $\therefore f(x) < 0$; 在 $(1, +\infty)$ 上, $\ln x > 0$, $g(x) < 0$, $\therefore f(x) < 0$.

由 $f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立可知, $f(1) < 0$,

\therefore 在 $(0, +\infty)$ 上, $f(x) < 0$.

又函数 $f(x)$ 为偶函数,

\therefore 在 $(-\infty, 0)$ 上, $f(x) < 0$. 不等式 $(x -$

$1)f(x) < 0$ 等价于 $\begin{cases} x > 1, \\ f(x) < 0, \end{cases} \therefore x \in$

$(1, +\infty)$. 故选 A.

10. C 【解析】 令 $g(x) = \frac{2}{x} (x \neq 0)$,

$h(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$. 要满足条件, 则

$g(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减, $h(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递减, 且 $g(a) \geq h(a)$.

易知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 令 $h'(x) > 0$, 解得 $0 <$

$x < e$, 令 $h'(x) < 0$, 解得 $x > e$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $a \geq e$.

由 $\frac{2}{a} \geq \frac{\ln a}{a}$, 解得 $0 < a \leq e^2$. 所以实数

a 的取值范围是 $[e, e^2]$. 故选 C.

11. C 【解析】 由题中 $y = f'(x)$ 的图象知, 当 $x \in (-2, 0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-2, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.



因为 $f(2a+1) \leq 1, f(-2) = 1, f(4) = 1$, 所以 $-2 \leq 2a+1 \leq 4$,

$$\text{解得 } -\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}.$$

12. 【解】 (1) 由 $f(x) = x^3 + 2x^2$, 得 $f'(x) = 3x^2 + 4x$.

$$\text{又 } f(1) = 3, f'(1) = 7,$$

故曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 3 = 7(x - 1)$, 即 $7x - y - 4 = 0$.

(2) 设 $g(x) = f(x) \cdot e^x = (x^3 + 2x^2) \cdot e^x$, 则 $g'(x) = (x^3 + 2x^2) \cdot e^x + (3x^2 + 4x) \cdot e^x = (x^3 + 5x^2 + 4x) \cdot e^x = e^x x(x+1)(x+4)$, 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = -4$ 或 $x = -1$ 或 $x = 0$. 则 $g'(x), g(x)$ 随 x 的变化情况如表所示.

x	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	单调递减	$g(-4)$	单调递增	$g(-1)$	单调递减	$g(0)$	单调递增

所以 $y = e^x f(x)$ 在 $(-4, -1)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, -4)$ 和 $(-1, 0)$ 上单调递减.

13. 【解】 (1) $f'(x) = x - \frac{a}{x} = \frac{x^2 - a}{x} (x > 0)$.

① 当 $a < 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间.

② 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \sqrt{a}$ 或 $x = -\sqrt{a}$ (舍).

则 $f'(x), f(x)$ 随 x 的变化情况如表所示.

x	$(0, \sqrt{a})$	\sqrt{a}	$(\sqrt{a}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	$f(\sqrt{a})$	单调递增

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\sqrt{a}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, \sqrt{a})$.



综上,当 $a < 0$ 时,函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$,无单调递减区间;当 $a > 0$ 时,函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\sqrt{a}, +\infty)$,单调递减区间为 $(0, \sqrt{a})$.

(2) 对任意的 $x \in [1, +\infty)$, 都有 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 只需对任意的 $x \in [1, +\infty)$, $f(x)_{\min} \geq 0$.

① 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以只需 $f(1) \geq 0$,

$f(1) = \frac{1}{2} - a \ln 1 - \frac{1}{2} = 0$, 所以 $a < 0$ 满足题意;

② 当 $0 < a \leq 1$ 时, $0 < \sqrt{a} \leq 1$, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以只需 $f(1) \geq 0$, 又 $f(1) = \frac{1}{2} - a \ln 1 - \frac{1}{2} = 0$, 所以 $0 < a \leq 1$ 满足题意;

③ 当 $a > 1$ 时, $\sqrt{a} > 1$, $f(x)$ 在 $[1, \sqrt{a}]$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{a}, +\infty)$ 上单调递增, 所以只需 $f(\sqrt{a}) \geq 0$ 即可, 而 $f(\sqrt{a}) < f(1) = 0$, 故 $a > 1$ 不满足题意.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$.

14. (1) 【解】 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

由 $f(x) = x(1 - \ln x)$ 得 $f'(x) = -\ln x$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$,

故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 【证明】 $b \ln a - a \ln b = a - b$ 变形为

$$\frac{\ln a}{a} - \frac{\ln b}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}, \text{ 所以 } \frac{\ln a + 1}{a} =$$

$$\frac{\ln b + 1}{b} \text{ ①. 令 } \frac{1}{a} = m, \frac{1}{b} = n,$$

则①式变为 $m(1 - \ln m) = n(1 - \ln n)$,

于是命题转化为证明 $2 < m + n < e$.



因为 $f(x) = x(1 - \ln x)$, 则有 $f(m) = f(n)$, 不妨设 $m < n$, 由 (1) 知 $0 < m < 1$, $1 < n < e$.

先证 $m+n > 2$.

要证 $m+n > 2$, 即 $n > 2-m$, 只需证 $f(n) < f(2-m)$, 即 $f(m) < f(2-m)$, 即 $f(m) - f(2-m) < 0$.

令 $g(x) = f(x) - f(2-x)$, $x \in (0, 1)$,

则 $g'(x) = -\ln x - \ln(2-x) = -\ln[x(2-x)] \geq -\ln 1 = 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, $x \rightarrow 1$ 时, $g(x) \rightarrow 0$,

所以 $g(x) < 0$, 即 $m+n > 2$.

再证 $m+n < e$.

因为 $m(1 - \ln m) = n(1 - \ln n) > m$,

所以需证 $n(1 - \ln n) + n < e$.

令 $h(x) = x(1 - \ln x) + x$, $x \in (1, e)$,

则 $h'(x) = 1 - \ln x > 0$, 故 $h(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增,

$x \rightarrow e$ 时, $h(x) \rightarrow e$, 所以 $h(x) < e$.

故 $h(n) < e$, 即 $m+n < e$.

综上, $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$.

15. BC 【解析】 设 $f(x) = \ln(1+x) - x$, $x >$

0 , 则 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} < 0$ 恒成

立, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

故 $f(x) < f(0) = 0$, 即 $\ln(1+x) < x$.

令 $x = \frac{3}{4e}$, 则 $\ln\left(1 + \frac{3}{4e}\right) < \frac{3}{4e}$, 且 $\frac{\sqrt{3}}{2e} -$

$\frac{3}{4e} = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4e} > 0$, 即 $\frac{3}{4e} < \frac{\sqrt{3}}{2e}$, 故

$b < a$.

因为 $\sqrt{3} < e$, 则 $\frac{\sqrt{3}}{2e} < \frac{1}{2}$, 又 $1 = \ln e <$

$\ln(1+e)$, 则 $\frac{1}{2} < \frac{\ln(1+e)}{2}$,

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2e} < \frac{1}{2} < \frac{\ln(1+e)}{2}$, 即 $a < c$.

因为 $1+e < e^2$, 则 $\ln(1+e) < 2$,



即 $\frac{\ln(1+e)}{2} < 1$, 又 $e^2 - 2e - 1 = (e-1)^2 -$

$2 > 0$, 即 $e^2 - 2e > 1$, 故 $\frac{\ln(1+e)}{2} < 1 < e^2 -$

$2e$, 即 $c < d$.

综上, $b < a < c < d$. 故选 BC.

16. 【解】 (1) $f'(x) = (x-a)e^x - 2x + 2a = (x-a)(e^x - 2)$,

令 $f'(x) = 0$, 则 $x = a$ 或 $x = \ln 2$,

若 $a = \ln 2$, 则 $f'(x) \geq 0$, 且 $f'(x)$ 不恒为 0, 所以函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增;

若 $a > \ln 2$, 则当 $x > a$ 或 $x < \ln 2$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $\ln 2 < x < a$ 时, $f'(x) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2)$ 和 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\ln 2, a)$ 上单调递减;

若 $a < \ln 2$, 则当 $x < a$ 或 $x > \ln 2$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $a < x < \ln 2$ 时, $f'(x) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 和 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(a, \ln 2)$ 上单调递减.

综上所述, 当 $a = \ln 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增;

当 $a > \ln 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2)$ 和 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\ln 2, a)$ 上单调递减;

当 $a < \ln 2$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 和 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(a, \ln 2)$ 上单调递减.

(2) 若选①, 当 $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < m < \ln 2$

时, 由(1)知 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递增, 在 $(a, \ln 2)$ 上单调递减, 所以

$f(m) \leq f(a) = -e^a + a^2$. 令 $g(a) = e^a -$

$a - 1$, 则 $g'(a) = e^a - 1$, 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时,

$g'(a) > 0$, 故 $g(a)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调



递增,所以 $g(a) > g(0) = 0$, 即 $e^a - a - 1 > 0$, 则 $-e^a < -a - 1$, 所以 $f(a) = -e^a + a^2 < a^2 - a - 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} < -1 < 0$,

所以 $f(m) < 0$.

若选②, 当 $1 < a < 2, 1 < m < 2$ 时, 由(1)得 $f(x)$ 在 $(1, a)$ 上单调递减, 在 $(a, 2)$ 上单调递增, 又 $f(1) = -ae - 1 + 2a = (2 - e)a - 1 < 0, f(2) = (1 - a)e^2 - 4 + 4a < 4(1 - a) - 4 + 4a = 0$, 所以当 $1 < x < 2$ 时, $f(x) < 0$, 所以 $f(m) < 0$.

1.3.2 函数的极值与导数

易错记

1-1. 【解】 $f'(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$.

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = 1$.

当 x 变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如表所示.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	无极值	单调递增

所以当 $x = 0$ 时, 函数取得极小值, 且极小值为 $f(0) = -6$, 无极大值.

题型诀

1-1. CD 【解析】 函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

令 $f'(x) > 0$, 得 $x < 0$ 或 $x > 2$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 2$.

\therefore 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 在区间 $(0, 2)$ 上单调递减.

当 $x = 0$ 时, 函数取得极大值, 为 $f(0) = 0$;

当 $x = 2$ 时, 函数取得极小值, 为 $f(2) = -4$.

故 A, B 错误, C, D 正确.



1-2. AC 【解析】函数 $f(x) = \frac{x}{e^x}$ 的定义

域为 \mathbf{R} , 且 $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$. 当 $x > 1$ 时,

$f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减; 当 $x < 1$ 时,

$f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增, 可得函数 $f(x)$

在 $x=1$ 处取得极大值, 为 $f(1) = \frac{1}{e}$, 所以

A 正确.

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在

$(1, +\infty)$ 上单调递减, 且 $f(0) = 0$, 当 $x > 0$

时, $f(x) > 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 的大致图象

如图所示, 所以函数 $f(x)$ 只有一个零点,

所以 B 错误.

由 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 且 $4 > \pi >$

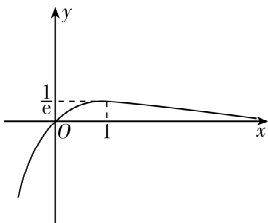
$3 > 1$, 可得 $f(4) < f(\pi) < f(3)$, 所以 C

正确.

由 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 且 $\pi > 2 >$

1 , 可得 $f(\pi) < f(2)$, 即 $\frac{\pi}{e^\pi} < \frac{2}{e^2}$, 即 $\pi e^2 <$

$2e^\pi$, 所以 D 错误. 故选 AC.



1-3. 【解】 由题意, $f(x) = x^2 e^{2x}$, 令

$f'(x) = 2x(x+1)e^{2x} = 0$, 解得 $x=0$ 或 $x=$

-1 , 当 $x < -1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $-1 < x < 0$ 时,

$f'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调

递增, 在 $(-1, 0)$ 上单调递减,

故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值, 且极大

值为 $f(-1) = \frac{1}{e^2}$, 在 $x=0$ 处取得极小值,

且极小值为 $f(0) = 0$.

1-4. 【解】 (1) 函数 $f(x) = \frac{x^2+x-1}{e^x}$ 的定义

域为 \mathbf{R} ,

且 $f'(x) = \frac{-x^2+x+2}{e^x} = \frac{-(x+1)(x-2)}{e^x}$,



\therefore 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线斜率为 $f'(0)=2$,

又 $f(0)=-1$, 即切点为 $(0, -1)$,

\therefore 所求切线方程为 $y-(-1)=2(x-0)$, 即 $2x-y-1=0$.

$$(2) \because f'(x) = \frac{-(x+1)(x-2)}{e^x}, \text{ 且 } e^x > 0,$$

\therefore 由 $f'(x)=0$ 得 $x=-1$ 或 $x=2$,

当 $x \in (-\infty, -1)$ 和 $(2, +\infty)$ 时,

$f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (-1, 2)$ 时, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 单调递增.

由 $f(x)$ 的单调性知函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(-1)=-e$, 极大值为 $f(2)=\frac{5}{e^2}$.

2-1. 【解】 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}. \text{ 当 } a \leq 0 \text{ 时, } f'(x) \leq 0$$

在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有极值点. 当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x >$

$\frac{1}{a}$, 所以, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减,

在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增, 即 $f(x)$ 在 $x =$

$\frac{1}{a}$ 处有极小值. 综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在

$(0, +\infty)$ 上没有极值点; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$

在 $(0, +\infty)$ 上有一个极值点.

2-2. 【解】 由题意可得 $f'(x) = 2mxe^x - 2x = 2x(me^x - 1)$.

① 当 $m \leq 0$ 时, $me^x - 1 < 0$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < 0$; 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x > 0$, 可得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$, $f(x)$ 有极大值, 且极大值为 $f(0) = 2 - 2m$, 无极小值.

② 当 $m > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x = -\ln m$.

(i) 当 $-\ln m > 0$, 即 $0 < m < 1$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < 0$ 或 $x > -\ln m$; 令 $f'(x) < 0$, 解



得 $0 < x < -\ln m$, 可得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, $(-\ln m, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, -\ln m)$, $f(x)$ 有极值, 且极大值为 $f(0) = 2 - 2m$, 极小值为 $f(-\ln m) = -(\ln m)^2 - 2\ln m$.

(ii) 当 $-\ln m = 0$, 即 $m = 1$ 时, $f'(x) = 2x \cdot (e^x - 1) \geq 0$, 且 $f'(x)$ 不恒为 0, 可得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, +\infty)$, 无极值.

(iii) 当 $-\ln m < 0$, 即 $m > 1$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < -\ln m$ 或 $x > 0$; 令 $f'(x) < 0$, 解得 $-\ln m < x < 0$, 可得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -\ln m)$, $(0, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\ln m, 0)$, $f(x)$ 有极值, 且极大值为 $f(-\ln m) = -(\ln m)^2 - 2\ln m$, 极小值为 $f(0) = 2 - 2m$.

综上所述, 当 $m \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$, 极大值为 $2 - 2m$, 无极小值; 当 $0 < m < 1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, $(-\ln m, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, -\ln m)$, 极大值为 $2 - 2m$, 极小值为 $-(\ln m)^2 - 2\ln m$; 当 $m = 1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, +\infty)$, 无极值; 当 $m > 1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -\ln m)$, $(0, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\ln m, 0)$, 极大值为 $-(\ln m)^2 - 2\ln m$, 极小值为 $2 - 2m$.

3-1. A 【解析】由题意, $f'(x) = (x-c)^2 + 2x(x-c) = (x-c) \cdot (3x-c)$, 则 $f'(2) = (2-c)(6-c) = 0$, 所以 $c = 2$ 或 $c = 6$.

若 $c = 2$, 则 $f'(x) = (x-2)(3x-2)$, 当 $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in \left(\frac{2}{3}, 2\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处有极小值, 满足题意.



若 $c=6$, 则 $f'(x)=3(x-6)(x-2)$, 当 $x \in (-\infty, 2)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (2, 6)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (6, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处有极大值, 不满足题意.

综上, $c=2$. 故选 A.

3-2. 【解】(1) 因为 $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$, 所以 $f'(x)=3x^2+2ax+b$. 因为函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值 7,

$$\text{所以 } \begin{cases} f(-1)=a-b+1=7, \\ f'(-1)=3-2a+b=0, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$$\begin{cases} a=-3, \\ b=-9, \end{cases} \quad \text{所以 } f(x)=x^3-3x^2-9x+2,$$

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3),$$

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < -1$ 或 $x > 3$; 令

$f'(x) < 0$, 解得 $-1 < x < 3$, 所以 $f(x)$ 在

$(-\infty, -1)$, $(3, +\infty)$ 上单调递增, 在

$(-1, 3)$ 上单调递减, 故 $x=-1$ 为极大值

点, 则 $a=-3$, $b=-9$ 符合题意, 所以 $a=-$

3 , $b=-9$.

(2) 由 (1) 可得 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$,

$f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(3, +\infty)$ 上单调递增,

在 $(-1, 3)$ 上单调递减,

当 $x=-1$ 时, $f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=7$,

当 $x=3$ 时, $f(x)$ 的极小值为 $f(3)=-25$.

3-3. 【解】 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,$

$$+\infty), \text{ 且 } f'(x)=1-\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}.$$

因为 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点,

$$\text{所以 } f'(1)=1-a-b=0,$$

$$\text{即 } a+b=1.$$

$$\text{此时 } f'(x)=1-\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}$$

$$=\frac{x^2-ax-b}{x^2}$$

$$=\frac{x^2-(1-b)x-b}{x^2}$$



$$= \frac{(x-1)(x+b)}{x^2},$$

因为 $b > 0$, 所以当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值.

$$\text{所以 } \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right) (a+b) = 3 + \frac{b}{a} + \frac{2a}{b}.$$

因为 $a > 0, b > 0$,

所以 $\frac{b}{a} + \frac{2a}{b} \geqslant 2 \sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} = 2\sqrt{2}$ (当且仅当 $a = \sqrt{2} - 1, b = 2 - \sqrt{2}$ 时等号成立).

此时 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 有最小值 $3 + 2\sqrt{2}$.

4-1. B 【解析】 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且

$$f'(x) = (x^2 + 2x - a) \cdot e^x,$$

令 $f'(x) = 0$, 则 $x^2 + 2x - a = 0$.

若 $\Delta = 4 + 4a \leqslant 0$, 即 $a \leqslant -1$,

则 $f'(x) = (x^2 + 2x - a)e^x \geqslant 0$ 恒成立,

$f(x)$ 为增函数, 无极值;

若 $\Delta = 4 + 4a > 0$, 即 $a > -1$,

则 $f(x)$ 有两个极值.

所以“ $a \geqslant -1$ ”是“ $f(x)$ 有极值”的必要不充分条件.

故选 B.

4-2. C 【解析】 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且

$$f'(x) = x^2 + ax + a,$$

由函数 $f(x)$ 有极小值和极大值,

得方程 $f'(x) = 0$ 有两个不同的实根,

所以 $\Delta = a^2 - 4a > 0 \Rightarrow a < 0$ 或 $a > 4$,

即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

故选 C.

4-3. C 【解析】 由题意可得, $f'(x) =$

$$1 + \ln x + ae^x (x > 0).$$

函数 $f(x)$ 没有极值点, 即 $f'(x) = 0$ 无实数解或有唯一解 (但 $f'(x)$ 在解的两侧符



号相同).

由 $f'(x) = 0$ 整理得 $-a = \frac{1+\ln x}{e^x}$.

令 $g(x) = \frac{1+\ln x}{e^x}, x > 0$,

则 $g'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x - 1}{e^x}$.

令 $h(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1 (x > 0)$,

则 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减且

$h(1) = 0$,

所以当 $0 < x < 1$ 时,

$h(x) > 0, g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增;

当 $x > 1$ 时,

$h(x) < 0, g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减,

故当 $x = 1$ 时,

$g(x)$ 取得极大值, 且 $g(1) = \frac{1}{e}$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$,

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$,

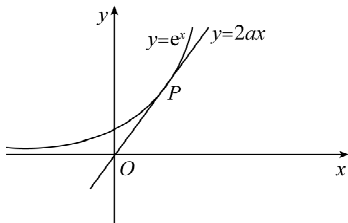
结合图象可知, $-a \geq \frac{1}{e}$, 即 $a \leq -\frac{1}{e}$.

4-4. $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{e}{2}, +\infty\right)$

【解析】由题意可知,

函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

$$f'(x) = e^x - 2ax.$$



因为函数 $f(x)$ 有极值点,

所以 $f'(x)$ 在 \mathbf{R} 上有变号零点,

则方程 $e^x - 2ax = 0$ 有实数根且 $f'(x)$ 在根的两侧符号不同.

在同一坐标系中作出函数 $y = e^x$ 的图象和直线 $y = 2ax$, 如图所示.

当直线 $y = 2ax$ 和曲线 $y = e^x$ 相切时,



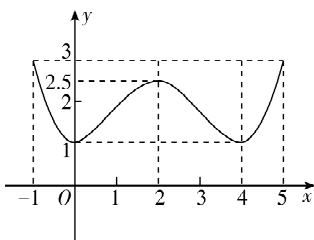
设切点为 $P(x_0, y_0)$,

$$\text{则} \begin{cases} 2a = e^{x_0}, \\ y_0 = e^{x_0}, \\ y_0 = 2ax_0, \end{cases}$$

解得 $a = \frac{e}{2}$.

由图可知 $a \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{e}{2}, +\infty\right)$.

5-1. D 【解析】由 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象, 结合表格, 画出 $f(x)$ 的图象, 如图所示,



对于①, $f(x)$ 在区间 $[-1, 0]$ 上单调递减, 所以①错误;

对于②, $f(x)$ 有 1 个极大值点, 2 个极小值点, 所以②错误;

对于③, 根据函数的极值和端点值可知 $f(x)$ 的值域为 $[1, 3]$, 所以③正确;

对于④, 如果 $x \in [t, 5]$ 时, 由 $f(x)$ 的图象可知, 当 $f(x)$ 的最小值是 1 时, t 的最大值为 4, 所以④正确.

故选 D.

6-1. D 【解析】 $f'(x) = 6(x^2 - 1)$, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = \pm 1$,

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-1) = 4 + a$, 极小值为 $f(1) = a - 4$, 且当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 要使 $f(x)$ 的图象与 x 轴有三个交点, 只需

$$\begin{cases} a+4 > 0, \\ a-4 < 0, \end{cases} \text{ 即 } -4 < a < 4.$$



故选 D.

6-2. ABD 【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 3$,

$f'(0) = -3$, 所以 $f(x)$ 的图象在点 $(0, 0)$

处的切线方程是 $y = -3x$, 即 $3x + y = 0$, A

正确;

当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $-1 < x < 1$

时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和

$(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, 1)$ 上单调

递减, 因此 -1 是 $f(x)$ 的极大值点, B

正确;

显然 1 是 $f(x)$ 的极小值点, $f(-1) = 2$,

$f(1) = -2$, 当 $x < -2$ 时, $f(x) < -2$, 当 $x > 2$ 时,

$f(x) > 2$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) > 0$, $y =$

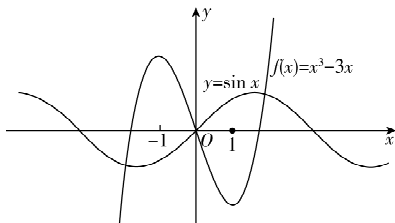
$\sin x \in [-1, 1]$, 且 $y = \sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},$

$\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 和

$\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 因此 $y =$

$f(x)$ 与 $y = \sin x$ 的图象有 3 个交点, 即

$y = \sin x - f(x)$ 有 3 个零点, D 正确;



设 $g(x) = \sin x + f(x) = \sin x + x^3 - 3x$,

$g'(x) = \cos x + 3x^2 - 3$,

令 $h(x) = g'(x) = \cos x + 3x^2 - 3$, 则

$h'(x) = 6x - \sin x$,

设 $\varphi(x) = h'(x) = 6x - \sin x$, 则 $\varphi'(x) = 6 -$

$\cos x > 0$ 恒成立,

所以 $\varphi(x)$, 即 $h'(x)$ 是增函数, 而 $h'(0) = 0$,

所以当 $x < 0$ 时, $h'(x) < 0$, $x > 0$ 时,

$h'(x) > 0$,

所以 $g'(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在

$(0, +\infty)$ 上单调递增,

$g'(0) = -2 < 0$, 易知 $g'(-1) = g'(1) > 0$,



所以 $g'(x)$ 存在 2 个零点, 由 $g'(x)$ 的单调性知这 2 个零点就是 $g(x)$ 的 2 个极值点, C 错误.

故选 ABD.

6-3. 【解】 (1) $\because f(x) = \ln(x+a) - x^2 + x$,
 $x > -a$,

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x+a} - 2x + 1.$$

\because 函数 $f(x) = \ln(x+a) - x^2 + x$ 在 $x=1$ 处取得极值,

$$\therefore f'(1) = 0,$$

$\therefore \frac{1}{1+a} - 1 = 0$, 解得 $a = 0$, 经检验符合题意.

$$(2) \because f(x) = -\frac{5}{2}x + b, \therefore \ln x - x^2 + x = -\frac{5}{2}x + b, \therefore \ln x - x^2 + \frac{7}{2}x = b.$$

$$\text{令 } h(x) = \ln x - x^2 + \frac{7}{2}x (x > 0),$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{1}{x} - 2x + \frac{7}{2} = -\frac{(4x+1)(x-2)}{2x}.$$

\therefore 当 $x \in [1, 3]$ 时, $h'(x)$, $h(x)$ 随 x 的变化情况如表:

x	$[1, 2)$	2	$(2, 3]$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	递增 ↗	极大值	递减 ↘

$$\text{计算得 } h(1) = \frac{5}{2}, h(3) = \ln 3 + \frac{3}{2} > \frac{5}{2},$$

$$h(2) = \ln 2 + 3,$$

$$\therefore h(x) \in \left[\frac{5}{2}, \ln 2 + 3 \right],$$

$$\therefore b \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{5}{2}, \ln 2 + 3 \right].$$

6-4. (1) 【解】 $f'(x) = 3x^2 + b$.

依题意得 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. 即 $\frac{3}{4} + b = 0$, 故

$$b = -\frac{3}{4}.$$

(2) **【证明】** 由 (1) 知 $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x + c$,



$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{4}.$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{1}{2}$.

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的情况为:

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增 ↗	$c + \frac{1}{4}$	递减 ↘	$c - \frac{1}{4}$	递增 ↗

$$\text{因为 } f(1) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = c + \frac{1}{4},$$

所以当 $c < -\frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 只有大于 1 的零点.

$$\text{因为 } f(-1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = c - \frac{1}{4},$$

所以当 $c > \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 只有小于 -1 的零点.

$$\text{由题设可知 } -\frac{1}{4} \leq c \leq \frac{1}{4}.$$

当 $c = -\frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 只有两个零点 $-\frac{1}{2}$ 和 1.

当 $c = \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 只有两个零点 -1 和 $\frac{1}{2}$.

当 $-\frac{1}{4} < c < \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 有三个零点 $x_1, x_2,$

$$x_3, \text{ 且 } x_1 \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right), x_2 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$x_3 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

综上, 若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点, 则 $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1.

巩固练

1. **A** 【解析】易知函数 $f(x)$ 的定义域是

$$\{x | x \neq 0\},$$

$$\text{由题意, } f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2},$$

当 $x < -2$ 或 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $-2 < x <$

0 或 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, $\therefore f(x)$ 在



$(-\infty, -2)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-2, 0)$ 和 $(0, 2)$ 上单调递减,

\therefore 极大值点是 $x = -2$, 极小值点是 $x = 2$.

2. **B** 【解析】因为 $f'(x) = 6x^2 + 2ax + 36$, 且 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处有极值, 所以 $f'(2) = 0$, 即 $24 + 4a + 36 = 0$, 解得 $a = -15$. 经检验 $a = -15$ 符合题意. 所以 $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-2)(x-3)$, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x < 2$ 或 $x > 3$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 2)$ 和 $(3, +\infty)$.

3. **A** 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 因为函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + a \ln x$ 有两个不同的极值点, 所以 $f'(x) = x - 1 + \frac{a}{x} = \frac{x^2 - x + a}{x} = 0$ 有两个不同的正根, 即 $x^2 - x + a = 0$ 有两个不同

的正根, 所以 $\begin{cases} \Delta = 1 - 4a > 0, \\ x_1 + x_2 = 1 > 0, \\ x_1 x_2 = a > 0, \end{cases}$ 解得 $0 < a <$

$\frac{1}{4}$, 故选 A.

4. **C** 【解析】由 $f(x) = \frac{\ln x}{e^x} (x > 0)$

得 $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x}$. 令 $g(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

$(x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, 所以

$g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 因为

$g(1) = -1 < 0, g(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 2 -$

$\ln \sqrt{e} > 0$, 所以存在 $x_0 \in (1, 2)$, 使

$g(x_0) = 0$, 即 $f'(x_0) = 0$, 当 $1 < x < x_0$

时, $g(x) < 0, f'(x) > 0$, 当 $x_0 < x < 2$ 时,

$g(x) > 0, f'(x) < 0$, 所以 $x = x_0$ 为

$f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$ 的极大值点, 所以 x_0 所在的

区间为 $(1, 2)$.



5. $y = -\frac{1}{e}$ 【解析】令 $y' = e^x + xe^x = (1+x)e^x = 0$, 得 $x = -1$, 且在 $x = -1$ 附近两侧的导数值异号, 故 $x = -1$ 为 $y = xe^x$ 的极值点. \therefore 当 $x = -1$ 时, $y = -\frac{1}{e}$,

\therefore 在极值点处的切线方程为 $y = -\frac{1}{e}$.

6. 1 $(2, +\infty)$ 【解析】 $f'(x) = 3ax^2 - 6x = 3x(ax - 2)$, 当 $a < 0$ 时, $f'(x) < 0$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 时恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 因为 $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = a - 2 < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有 1 个零点.

若 $a = 0$, 则 $f(x) = -3x^2 + 1$, 由 $f(x) = 0$

得 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 此时 $f(x)$ 有 2 个零点, 不

满足题意; 若 $a < 0$, 由上可得 $f(x)$ 存在

正零点, 不满足题意; 若 $a > 0$, 则当 $x \in$

$(-\infty, 0)$, $\left(\frac{2}{a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$,

$f(x)$ 单调递增, 当 $x \in \left(0, \frac{2}{a}\right)$ 时,

$f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 因为 $f(0) =$

1 , $f(-1) = -a - 2 < 0$, 所以存在 $x_0 \in$

$(-1, 0)$, 使得 $f(x_0) = 0$, 又因为 $f(x)$

有且只有 1 个零点 x_0 , 且 $x_0 < 0$, 所以

$f\left(\frac{2}{a}\right) = 1 - \frac{4}{a^2} > 0$, 解得 $a > 2$, 故实数 a

的取值范围是 $(2, +\infty)$.

7. C 【解析】函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 9$

的定义域为 \mathbf{R} , $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$,

因为 $f(x)$ 在 $x = -3$ 处取得极值, 所以

$f'(-3) = 3 \times (-3)^2 - 6a + 3 = 0$, 解得 $a =$

5 , 此时 $f'(x) = 3x^2 + 10x + 3 = 3 \left(x + \right.$

$\left. \frac{1}{3} \right) (x + 3)$, 当 $x < -3$ 或 $x > -\frac{1}{3}$ 时,

$f'(x) > 0$, 当 $-3 < x < -\frac{1}{3}$ 时, $f'(x) < 0$,

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, -3)$, $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$



上单调递增,在 $\left(-3, -\frac{1}{3}\right)$ 上单调递减,所以函数 $f(x)$ 在 $x=-3$ 处有极大值,则 $a=5$, A 正确;

$f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$, $f(-3) = (-3)^3 + 5 \times (-3)^2 + 3 \times (-3) - 9 = 0$, B 正确;

函数 $f(x)$ 在 $x = -\frac{1}{3}$ 处有极小值, C 错误;

函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-3, -\frac{1}{3}\right]$ 上单调递减, D 正确. 故选 C.

8. **A** 【解析】设 $g(x) = \frac{f(x)}{x} (x > 0)$, 则

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2} =$$

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)', \text{可设 } g(x) = \frac{e^x}{x} + c, \text{ 则 } g(1) =$$

$$e + c = 0, \text{ 解得 } c = -e, \text{ 故 } g(x) = \frac{e^x}{x} - e,$$

即 $f(x) = e^x - ex$. 令 $g'(x) > 0$, 则 $x > 1$,

故 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore g(2) < g(3)$, 即 $\frac{f(2)}{2} < \frac{f(3)}{3}$, 则

$3f(2) < 2f(3)$, A 错误;

$\therefore f'(x) = e^x - e$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 1$,

则 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 令

$f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < 1$, 则 $f(x)$ 在 $(0,$

$1)$ 上单调递减, $\therefore f(1) < f(2) < f(e)$,

$f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 无极大值,

B, C, D 均正确. 故选 A.

9. **B** 【解析】令 $g(x) = x^2 e^x, x \in \mathbf{R}$,

$$\text{则 } g'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(x+2).$$

令 $g'(x) = 0$, 得 $x=0$ 或 $x=-2$,

$\therefore g(x)$ 在 $(-2, 0)$ 上单调递减,

在 $(-\infty, -2), (0, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore g(x)$ 的极大值为 $g(-2) = \frac{4}{e^2}$, $g(x)$

的极小值为 $g(0) = 0$. 又当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$g(x) \rightarrow +\infty$; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$. 由

于 $f(x) = x^2 e^x - a$ 恰有三个零点, 则 $0 <$



$$a < \frac{4}{e^2}.$$

- 10. B** 【解析】令 $f'(x) = (2-a)(x-1)(e^x - a) = 0$, 得 $x = \ln a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 解得 $a \in (\sqrt{e}, e)$. 由题意知, 当 $x \in \left(\frac{1}{2}, \ln a\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (\ln a, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $2-a > 0$, 得 $a < 2$. 综上, $a \in (\sqrt{e}, 2)$. 故选 B.

- 11. 1** 【解析】由函数图象可知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 因此 $x = -1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点, $x = 2$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点, 因此 $x = -1, x = 2$ 是 $f'(x) = 0$ 的两个根. 因为 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, 所以 $x = -1, x = 2$ 是方程 $3ax^2 + 2bx + c = 0$ 的两个根, 根据一元二次方程根与系

$$\text{数的关系, 则有} \begin{cases} -1+2 = -\frac{2b}{3a}, \\ -1 \times 2 = \frac{c}{3a}, \end{cases}$$

$$\text{化简得} \begin{cases} b = -\frac{3}{2}a, \\ c = -6a. \end{cases}$$

$$\text{所以} \frac{f'(0)}{f'(1)} = \frac{c}{3a+2b+c} = 1.$$

- 12. AD** 【解析】由题知 $h(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x}$ ($x > 0$), 所以 $h'(x) = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \left(\frac{1}{x} \ln x\right)' = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1 - \ln x}{x^2} e^{\frac{1}{x} \ln x}$, 令 $h'(x) = 0$, 得 $x = e$, 当 $0 < x < e$ 时, $h'(x) > 0$, 此时函数 $h(x)$ 单调递增; 当 $x > e$ 时, $h'(x) < 0$, 此时函数 $h(x)$ 单调递减. 所以 $h(x)$ 有极大值, 为 $h(e) = e^{\frac{1}{e}}$, 无极小值. 故选 AD.

- 13. AD** 【解析】函数 $f(x) = x \ln x + x^2$ ($x >$



0), $\therefore f'(x) = \ln x + 1 + 2x$, $\because x_0$ 是函数

$f(x)$ 唯一的极值点, $\therefore f'(x_0) = 0$, 即

$\ln x_0 + 1 + 2x_0 = 0$, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上

单调递增, $f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e} > 0$, 当 $x > \frac{1}{e}$

时, $f'(x) > 0$, \therefore 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f'(x) \rightarrow$

$-\infty$, $\therefore 0 < x_0 < \frac{1}{e}$, 故 A 正确, B 不正确;

$f(x_0) + 2x_0 = x_0 \ln x_0 + x_0^2 + 2x_0 =$

$x_0(\ln x_0 + x_0 + 2) = x_0(1 - x_0) > 0$, 故 D

正确, C 不正确.

1.3.3 三次函数的性质:

单调区间和极值

易错记

1-1. A 【解析】因为 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x +$

4, 所以 $f'(x) = x^2 - 4$. 由 $f'(x) > 0$ 得 $x > 2$

或 $x < -2$, 由 $f'(x) < 0$ 得 $-2 < x < 2$, 所以

$f(x)$ 在 $[0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, 3]$ 上单

调递增. 又因为 $f(0) = 4$, $f(2) = -\frac{4}{3}$,

$f(3) = 1$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上的最大值

是 4, 最小值是 $-\frac{4}{3}$. 故选 A.

2-1. $[-3, 3]$ 【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 6x -$

$9 = 3(x-3)(x+1)$, 当 $x < -1$ 时, $f'(x) > 0$,

函数 $f(x)$ 单调递增, 当 $-1 < x < 3$ 时,

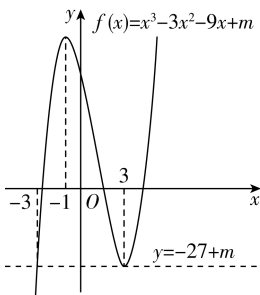
$f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 当 $x > 3$

时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 所以

$f(x)$ 的极小值为 $f(3) = -27 + m$. 又

$f(-3) = f(3) = -27 + m$, 作出 $f(x)$ 的大致

图象如图所示.





因为函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ 在区间 $(n, +\infty)$ 上的极小值也是最小值, 所以由图可知 $-3 \leq n < 3$, 即 n 的取值范围是 $[-3, 3)$.

题型诀

1-1. C 【解析】因为 $f(x) = x - 2\sin x$, 则

$f'(x) = 1 - 2\cos x$. 因为 $0 \leq x \leq \pi$, 所以由

$f'(x) = 0$ 可得 $x = \frac{\pi}{3}$. 当 $0 < x < \frac{\pi}{3}$ 时,

$f'(x) < 0$; 当 $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ 时, $f'(x) > 0$. 所以

函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调递减, 在

$(\frac{\pi}{3}, \pi)$ 上单调递增, 所以函数 $f(x)$ 在

$[0, \pi]$ 上的最小值为 $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} -$

$2\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$. 故选 C.

1-2. A 【解析】 $\because f(x) = x^4 - 4x^2 + 1, x \in$

$(-2, 2), \therefore f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2),$

令 $f'(x) = 0$, 则 $x = 0$ 或 $x = \pm\sqrt{2}$.

\therefore 当 $-2 < x < -\sqrt{2}$ 时, $f'(x) < 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $-\sqrt{2} < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $0 < x < \sqrt{2}$ 时, $f'(x) < 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $\sqrt{2} < x < 2$ 时, $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递增,

$\therefore f(x)$ 在 $x = \pm\sqrt{2}$ 处取得极小值, 在 $x = 0$ 处取得极大值, 故 C, D 错误.

又当 x 趋近 2 时, $f(x)$ 趋近 1, 当 x 趋近 -2 时, $f(x)$ 趋近 1,

$f(0) = 1, f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 4 \times (\sqrt{2})^2 + 1 = -3,$

\therefore 函数 $f(x)$ 既有最小值也有最大值.

故选 A.

1-3. $2\sqrt{e} + e$ 【解析】 $f'(x) = e^x(-2x + 1),$



令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$, 当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

又 $f(0) = 3$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{e}$, $f(1) = e$,

所以 $M = 2\sqrt{e}$, $N = e$,

所以 $M + N = 2\sqrt{e} + e$.

1-4. $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 【解析】 $\because f(x) = 2\sin x +$

$\sin 2x$, $f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi) + \sin[2(x+2\pi)] = 2\sin x + \sin 2x = f(x)$, $\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T = 2\pi$, \therefore 求 $f(x)$ 的最小值相当于求 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的最小值.

$$f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 2\cos x + 2(2\cos^2 x - 1) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1).$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $\cos x = \frac{1}{2}$ 或 $\cos x = -1$,

$x \in [0, 2\pi]$.

\therefore 由 $\cos x = -1$, 得 $x = \pi$; 由 $\cos x = \frac{1}{2}$, 得

$$x = \frac{5}{3}\pi \text{ 或 } x = \frac{\pi}{3}.$$

\because 函数的最值只能在导数值为 0 的点或区间端点处取到,

$$f(\pi) = 2\sin \pi + \sin 2\pi = 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}, f(0) = 0, f(2\pi) = 0,$$

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2-1. 【解】 (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

当 $a = -1$ 时, $f(x) = -\ln x + \sqrt{x}$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}.$$

当 $x > 4$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 的单调递增



区间为 $(4, +\infty)$;

当 $0 < x < 4$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 4)$.

$$(2) f'(x) = \frac{a}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + 2a}{2x}, 1 \leq x \leq 4.$$

当 $a \leq -1$ 时, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上单调递减,

此时, $f(x)_{\min} = f(4) = 2a \ln 2 + 2$.

当 $a \geq -\frac{1}{2}$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上

单调递增, 此时, $f(x)_{\min} = f(1) = 1$.

当 $-1 < a < -\frac{1}{2}$ 时, 若 $1 < x < 4a^2$, 则

$f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

若 $4a^2 < x < 4$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

此时, $f(x)_{\min} = f(4a^2) = a \ln(4a^2) + \sqrt{4a^2} = 2a \ln(-2a) - 2a$.

综上所述,

$$f(x)_{\min} = \begin{cases} 2a \ln 2 + 2, & a \leq -1, \\ 2a \ln(-2a) - 2a, & -1 < a < -\frac{1}{2}, \\ 1, & a \geq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

2-2. 【解】(1) 由题意可得, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

$$\text{由} \begin{cases} f'(0) = b = -6, \\ f'(-2) = 12 - 4a + b = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{3}{2}, \\ b = -6, \end{cases}$$

此时 $f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x-1)(x+2)$.

易知当 $x = -2$ 时, $y = f(x)$ 有极大值.

所以 $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x$.

(2) 由 (1) 知, $f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x-1)(x+2)$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -2, x_2 = 1$,

$f'(x), f(x)$ 在 $[-3, 2]$ 上随 x 的变化情况如表:



x	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, 1)$	1	$(1, 2)$	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	单调 递增	极大 值 10	单调 递减	极小值 $-\frac{7}{2}$	单调 递增	2

由表可知 $f(x)$ 在 $[-3, 2]$ 上的最大值为

$$f(-2) = 10, \text{ 最小值为 } f(1) = -\frac{7}{2}.$$

2-3. 【解】 (1) 当 $a=0$ 时, $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}$,

$$f'(x) = -\frac{6}{x^3} + \frac{2}{x^2}.$$

$$\text{所以 } f(1) = 1, f'(1) = -4.$$

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=-4(x-1)$,

$$\text{即 } y = -4x + 5.$$

$$(2) \text{ 由 } f(x) = \frac{3-2x}{x^2+a} \text{ 得}$$

$$f'(x) = \frac{-2(x^2+a) - 2x(3-2x)}{(x^2+a)^2} =$$

$$\frac{2(x^2-3x-a)}{(x^2+a)^2}.$$

由题意知 $f'(-1)=0$, 所以 $(-1)^2-3 \times (-1)-a=0$, 故 $a=4$.

$$\text{当 } a=4 \text{ 时, } f(x) = \frac{3-2x}{x^2+4},$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x-4)}{(x^2+4)^2}.$$

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的情况如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增 ↗	1	递减 ↘	$-\frac{1}{4}$	递增 ↗

因此, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$ 和 $(4, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-1, 4)$. 所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上的最大值是 $f(-1)=1$.

又因为当 $x \in (4, +\infty)$ 时, $f(x) < 0$, 所以 $f(-1)=1$ 是 $f(x)$ 的最大值.

同理可知, $f(4) = -\frac{1}{4}$ 是 $f(x)$ 的最小值.



3-1. D 【解析】 $f'(x) = \frac{x^2+a-2x^2}{(x^2+a)^2} = \frac{a-x^2}{(x^2+a)^2}$

当 $x > \sqrt{a}$ 或 $x < -\sqrt{a}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

若 $a > 1$, 则 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最大值

$$f(x)_{\max} = f(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 则 } a = \frac{3}{4} < 1, \text{ 不符合题意;}$$

若 $a \leq 1$, 则 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最大值

$$f(x)_{\max} = f(1) = \frac{1}{1+a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 则 } a = \sqrt{3} - 1. \text{ 故}$$

选 D.

3-2. $[-2, 1)$ 【解析】 $2a^2 - a + 10 > 0$ 恒

成立. $f(x) = x^3 - 3x, x \in \mathbf{R}, f'(x) = 3x^2 - 3$,

令 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ 得 $x = \pm 1$. 当 $x \in$

$(-\infty, -1)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递

增; 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$

单调递减; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

函数 $f(x)$ 单调递增. 因为函数 $f(x) = x^3 -$

$3x$ 在 $(a, 10 + 2a^2)$ 上有最小值, 所以 $f(x)$

在 $(a, 10 + 2a^2)$ 上的最小值即为极小值,

即为 $f(1) = -2$, 令 $f(x) = x^3 - 3x = -2$, 解

$$\text{得 } x = -2 \text{ 或 } x = 1, \text{ 则 } \begin{cases} a < 1 < 10 + 2a^2, \\ a \geq -2, \end{cases} \text{ 解}$$

得 $-2 \leq a < 1$, 即实数 a 的取值范围是

$[-2, 1)$.

3-3. $[-1, 3 - \frac{1}{2e}]$ 【解析】当 $x \leq 1$ 时,

$f'(x) = (x+1)(e^x - 2)$, 令 $f'(x) > 0$, 则

$\ln 2 < x < 1$ 或 $x < -1$; 令 $f'(x) < 0$,

则 $-1 < x < \ln 2$, \therefore 函数 $f(x)$ 在 $(-1, \ln 2)$

上单调递减, 在 $(-\infty, -1), (\ln 2, 1)$ 上单

调递增, \therefore 函数 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极

大值为 $f(-1) = 1 - \frac{1}{e}$, 在 $x = \ln 2$ 处取得



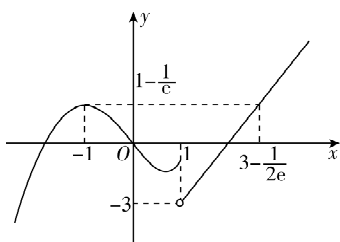
极小值为 $f(\ln 2) = -(\ln 2)^2$, $f(1) = e - 3$.

当 $x > 1$ 时, 令 $f(x) = 2x - 5 \leq 1 - \frac{1}{e}$, 解得

$$1 < x \leq 3 - \frac{1}{2e}.$$

作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示, 由图可

知实数 m 的取值范围是 $\left[-1, 3 - \frac{1}{2e}\right]$.



3-4. 【解】 (1) $f(x)$ 的定义域是 $(0,$

$$+\infty), f'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}.$$

解 $f'(x) > 0$ 得 $x > \frac{1}{2}$, 解 $f'(x) < 0$ 得 $0 <$

$$x < \frac{1}{2},$$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(\frac{1}{2},\right.$

$+\infty)$, 单调递减区间是 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 取得极小值且为

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \ln 2, \text{ 无极大值.}$$

(2) 因为 $g(x) = f(x) + (a-2)x = ax - \ln x$,

$$x > 0, \text{ 所以 } g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}.$$

当 $\frac{1}{a} \geq e$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) \leq 0$, 且

$g'(x)$ 不恒为 0, 所以 $g(x)$ 在 $(0, e]$ 上单

调递减, 所以 $g(x)_{\min} = g(e) = ae - 1 = 2$,

解得 $a = \frac{3}{e}$ (舍去);

当 $0 < \frac{1}{a} < e$, 即 $a > \frac{1}{e}$ 时, 若 $0 < x < \frac{1}{a}$, 则

$g'(x) < 0$, 若 $\frac{1}{a} < x < e$, 则 $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a = 2$, 解得

$a = e$, 满足条件.



综上,实数 a 的值是 e .

4-1. C 【解析】因为 $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$, 所以 $g'(x) = x(x-2)$, 当 $-1 < x < 0$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以在 $[-1, 1]$ 上, $g(x)_{\max} = g(0) = 2$. 因为 $\forall x_1 \in (0, 1], \exists x_2 \in [-1, 1]$, 有 $g(x_2) \geq f(x_1)$, 所以 $f(x) = -\ln x + \frac{a}{x} - ex + 4 \leq 2$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立, 即 $a \leq x \ln x + ex^2 - 2x$ 在 $(0, 1]$ 上恒成立. 令 $h(x) = x \ln x + ex^2 - 2x$ ($0 < x \leq 1$), 则 $h'(x) = \ln x + 2ex - 1$. 令 $m(x) = h'(x) = \ln x + 2ex - 1$ ($0 < x \leq 1$), 则 $m'(x) = \frac{1}{x} + 2e > 0$ 恒成立, 所以 $h'(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增. 又 $h'\left(\frac{1}{e^2}\right) = -2 + \frac{2}{e} - 1 < 0$, $h'(1) = 2e - 1 > 0$, 故存在唯一 $x_0 \in (0, 1]$, 使得当 $0 < x < x_0$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x_0 < x < 1$ 时, $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递增. 又 $h'(x_0) = \ln x_0 + 2ex_0 - 1 = 0$, 解得 $x_0 = \frac{1}{e}$, 所以 $h(x)_{\min} = h\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} + e \times \left(\frac{1}{e}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{e} = -\frac{2}{e}$, 所以 $a \leq -\frac{2}{e}$, 即 a 的取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{2}{e}\right]$. 故选 C.

4-2. $(-\infty, 1]$ 【解析】由题知 $x > 0$. 因为 $f(x) = \frac{e^{x-2}}{x} = \frac{e^{x-2}}{e^{\ln x}} = e^{x-\ln x-2}$, 所以 $f(x) \geq k(x - \ln x - 1)$ 恒成立, 即 $e^{x-\ln x-2} \geq k(x - \ln x - 1)$ 恒成立. 令 $h(x) = x - \ln x - 1$ ($x > 0$), 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, 所以在 $(0, 1)$ 上, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 故 $h(x) \geq h(1) = 0$. 令 $t = x - \ln x - 1$ ($t \geq 0$), 则



$e^{x-\ln x-2} \geq k(x-\ln x-1)$ 可化为 $e^{t-1} \geq kt$ ①,

当 $t=0$ 时, ①式可化为 $\frac{1}{e} \geq 0$, 此时不等

式恒成立, 故 $k \in \mathbf{R}$; 当 $t>0$ 时, ①式可化

为 $k \leq \frac{e^{t-1}}{t}$ 恒成立, 故只需 $k \leq \left(\frac{e^{t-1}}{t}\right)_{\min}$ 即

可. 令 $g(t) = \frac{e^{t-1}}{t} (t>0)$, 则 $g'(t) =$

$\frac{(t-1)e^{t-1}}{t^2}$, 在 $(0, 1)$ 上, $g'(t) < 0$, $g(t)$ 单

调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上, $g'(t) > 0$, $g(t)$ 单

调递增, 所以 $g(t)_{\min} = g(1) = 1$, 故 $k \leq 1$.

综上, k 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

4-3. 【解】 (1) $\because f(x) = x^3 + ax^2 + \frac{3}{2}x +$

$\frac{3}{2}a, \therefore f'(x) = 3x^2 + 2ax + \frac{3}{2}.$

由题意知 $f'(x) = 0$ 有实数解,

$\therefore \Delta = 4a^2 - 4 \times 3 \times \frac{3}{2} \geq 0,$

$\therefore a^2 \geq \frac{9}{2}$, 即 $a \leq -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 或 $a \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$

故实数 a 的取值范围是

$\left(-\infty, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty\right).$

(2) $\because f'(-1) = 0, \therefore 3 - 2a + \frac{3}{2} = 0$, 即 $a =$

$\frac{9}{4}, \therefore f(x) = x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{27}{8},$

$f'(x) = 3x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{3}{2} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+1).$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\frac{1}{2}$ 或 $x = -1$,

则 $f(x)$ 在 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减, 在

$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 上单调递增.

当 $x \in [-1, 0]$ 时, $f(-1) = \frac{25}{8}, f\left(-\frac{1}{2}\right) =$

$\frac{49}{16}, f(0) = \frac{27}{8},$

$\therefore f(x)_{\max} = f(0) = \frac{27}{8},$

$f(x)_{\min} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{49}{16}.$



故对任意 $x_1, x_2 \in [-1, 0]$, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq$

$$f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = \frac{5}{16},$$

$\therefore m \geq \frac{5}{16}$, 即 m 的最小值为 $\frac{5}{16}$.

4-4. 【解】 (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = e^x + x^2 - x$,

$$f'(x) = e^x + 2x - 1.$$

故当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

(2) 方法一: $f(x) \geq \frac{1}{2}x^3 + 1$ 等价于

$$\left(\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1\right)e^{-x} \leq 1.$$

设函数 $g(x) = \left(\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1\right)e^{-x}$ ($x \geq 0$),

$$\text{则 } g'(x) = -\left(\frac{1}{2}x^3 - ax^2 + x + 1 - \frac{3}{2}x^2 + 2ax - 1\right)e^{-x}$$

$$= -\frac{1}{2}x[x^2 - (2a+3)x + 4a+2]e^{-x}$$

$$= -\frac{1}{2}x(x-2a-1)(x-2)e^{-x}.$$

(i) 若 $2a+1 \leq 0$, 即 $a \leq -\frac{1}{2}$, 则当 $x \in (0, 2)$ 时, $g'(x) > 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递增,

而 $g(0) = 1$,

故当 $x \in (0, 2)$ 时, $g(x) > 1$, 不合题意.

(ii) 若 $0 < 2a+1 < 2$, 即 $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$,

则当 $x \in (0, 2a+1) \cup (2, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$;

当 $x \in (2a+1, 2)$ 时, $g'(x) > 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0, 2a+1), (2, +\infty)$ 单调递减, 在 $(2a+1, 2)$ 单调递增.

由于 $g(0) = 1$, 所以 $g(x) \leq 1$ 当且仅当

$$g(2) = (7-4a)e^{-2} \leq 1,$$



$$\text{即 } a \geq \frac{7-e^2}{4}.$$

$$\text{所以当 } \frac{7-e^2}{4} \leq a < \frac{1}{2} \text{ 时, } g(x) \leq 1.$$

$$\text{(iii) 若 } 2a+1 \geq 2, \text{ 即 } a \geq \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } g(x) \leq \left(\frac{1}{2}x^3 + x + 1 \right) e^{-x}.$$

$$\text{由于 } 0 \in \left[\frac{7-e^2}{4}, \frac{1}{2} \right),$$

$$\text{故由 (ii) 可得 } \left(\frac{1}{2}x^3 + x + 1 \right) e^{-x} \leq 1.$$

$$\text{故当 } a \geq \frac{1}{2} \text{ 时, } g(x) \leq 1.$$

$$\text{综上, } a \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{7-e^2}{4}, +\infty \right).$$

$$\text{方法二: 当 } x=0 \text{ 时, } f(x)=1, \frac{1}{2}x^3+1=1, \text{ 不}$$

$$\text{等式 } f(x) \geq \frac{1}{2}x^3+1 \text{ 成立, } a \in \mathbf{R}$$

$$\text{当 } x>0 \text{ 时, } f(x) \geq \frac{1}{2}x^3+1 \text{ 等价于}$$

$$a \geq \frac{\frac{1}{2}x^3 + x + 1 - e^x}{x^2}.$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3 + x + 1 - e^x}{x^2}, x>0,$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3 - x - 2 + (2-x)e^x}{x^3} =$$

$$\frac{(x-2)\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1 - e^x\right)}{x^3}.$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 - e^x, x \geq 0,$$

$$\text{则 } h'(x) = x + 1 - e^x \leq 0,$$

$$\text{且 } h'(x) = 0 \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上不恒成立,}$$

$$\text{故 } h(x) \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 上单调递减.}$$

$$\text{所以 } h(x) \leq h(0) = 0.$$

$$\text{令 } g'(x) > 0 \text{ 得 } 0 < x < 2, \text{ 令 } g'(x) < 0 \text{ 得 } x >$$

$$2, \text{ 则 } g(x) \text{ 在 } (0, 2) \text{ 上单调递增, 在 } (2,$$

$$+\infty) \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{所以 } a \geq g(x)_{\max} = g(2) = \frac{7-e^2}{4}.$$



综上, a 的取值范围是 $\left[\frac{7-e^2}{4}, +\infty\right)$.

5-1. C 【解析】 $f'(x) = 3x^2 - (6a+3)x + 6a = (3x-6a)(x-1)$,

令 $f'(x) = 0$, 则 $x = 2a$ 或 $x = 1$.

因为 $f(1) = 3a - \frac{1}{2}$,

所以 $f(1)$ 是函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上的最小值, 即 $x = 1$ 是极小值点,

则 $x = 2a$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点, 所以 $-1 < 2a < 1$.

又因为 $f(-1) \geq 3a - \frac{1}{2}$, 所以 $-\frac{1}{2} < a \leq -\frac{1}{6}$.

5-2. B 【解析】由题得 $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 -$

$$2x - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 4x - 7) = \frac{1}{2}(3x -$$

$7)(x+1)$, 当 $x < -1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单

调递增, 当 $-1 < x < \frac{7}{3}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单

调递减, 当 $x > \frac{7}{3}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单

调递增. 又因为 $f(-1) = 2$, 所以当 $x \in (-\infty, 0]$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $f(-1) = 2$.

因为 $-a^2 \leq 0$, 所以 $f(-a^2) \leq 2$. 又 $f(4) = 2$, 所以有 $f(-a^2) \leq f(4)$. 故选 B.

5-3. AB 【解析】对于 A: 要证 $f(x) > x+1$, 即证 $f(x) - x - 1 > 0$.

设 $g(x) = e^x - x - 1$, 则 $g'(x) = e^x - 1$,

所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 所以 $g(x) > g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$, 故正确.

对于 B: 由题意得 $y = \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{e^x}{\ln x}$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $e^x > 0$, $\ln x < 0$, 所以 $y < 0$, 故正确.

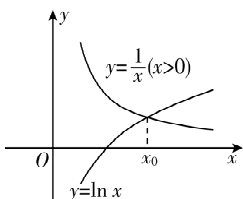
对于 C: 设 $F(x) = \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{e^x}{\ln x}$, 则 $F'(x) =$

$$\frac{e^x \cdot \ln x - \frac{e^x}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{e^x}{(\ln x)^2} \left(\ln x - \frac{1}{x} \right).$$



令 $F'(x) = 0$, 则 $\ln x = \frac{1}{x}$, 作出函数 $y =$

$\ln x$ 与 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 的图象如图所示,



$y = \ln x$ 与 $y = \frac{1}{x}$ 的图象只有一个交点, 设

交点横坐标为 x_0 , 因为当 $x = 1$ 时, $\ln 1 =$

$0 < \frac{1}{1}$, 所以 $x_0 > 1$, 则 $x \in (0, 1) \cup (1, x_0)$

时, $F'(x) < 0$; $x \in (x_0, +\infty)$ 时,

$F'(x) > 0$, 故 $y = \frac{f(x)}{\ln x}$ 有且只有一个极值

点, 故错误.

对于 D: $\frac{f(x)}{x^2} > k - x^2 + 4x + 5$ 恒成立, 则 $k <$

$\frac{e^x}{x^2} + x^2 - 4x - 5$ 恒成立,

设 $h(x) = \frac{e^x}{x^2} + x^2 - 4x - 5, x > 0$,

则 $h'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} + 2x - 4 = \left(\frac{e^x}{x^3} + \right.$

$2 \Big) (x - 2)$, 令 $h'(x) = 0$, 得 $x = 2$.

因为当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\frac{e^x}{x^3} + 2 > 0$,

所以当 $x \in (0, 2)$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in$

$(2, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$,

所以 $h(x)_{\min} = h(2) = \frac{e^2}{4} + 4 - 8 - 5 = \frac{e^2}{4} -$

9 , 所以 $k < \frac{e^2}{4} - 9$, 故错误.

故选 AB.

5-4. 【解】(1) 由 $f(x) = x^2 - ax + 2\ln x (x >$

$0)$, 得 $f'(x) = 2x - a + \frac{2}{x}$.

因为 $x > 0$, 所以 $2x + \frac{2}{x} \geq 4$, 当且仅当 $x = 1$

时取等号.

因此当 $a \leq 4$ 时, $f'(x) = 2x - a + \frac{2}{x} \geq 0$ 在



$(0, +\infty)$ 上恒成立, 当且仅当 $x=1$ 且 $a=4$ 时, 等号成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

当 $a > 4$ 时, 由 $f'(x) = 2x - a + \frac{2}{x} =$

$$\frac{2x^2 - ax + 2}{x} > 0, \text{ 解得 } x > \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4} \text{ 或 } 0 < x <$$

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{4}.$$

由 $f'(x) = 2x - a + \frac{2}{x} < 0$, 得 $\frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{4} <$

$$x < \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4}.$$

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{4}\right)$,

$\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4}, +\infty\right)$ 上单调递增, 在

$\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{4}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4}\right)$ 上单调递减.

综上, 当 $a \leq 4$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 4$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{4}\right)$,

$\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4}, +\infty\right)$ 上单调递增, 在

$\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 16}}{4}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4}\right)$ 上单调递减.

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

由(1)可得, x_1, x_2 是方程 $2x^2 - ax + 2 = 0$ 的两个不等实根,

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{a}{2}, x_1 x_2 = 1,$$

$$\text{因此 } f(x_2) - f(x_1) = (x_2^2 - ax_2 + 2 \ln x_2) - (x_1^2 - ax_1 + 2 \ln x_1)$$

$$= x_2^2 - x_1^2 + 2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 2 \ln \frac{x_2}{x_1},$$

$$= x_1^2 - x_2^2 + 2 \ln \frac{x_2}{x_1}$$

$$= \frac{1}{x_2^2} - x_2^2 + 2 \ln x_2^2.$$

$$\text{令 } t = x_2^2, \text{ 则 } f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{t} - t + 2 \ln t.$$



$$\text{由(1)可知 } x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4},$$

$$\text{当 } a \geq 2\sqrt{e} + \frac{2\sqrt{e}}{e} \text{ 时,}$$

$$x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 16}}{4} \geq$$

$$\frac{2\sqrt{e} + \frac{2\sqrt{e}}{e} + \sqrt{4e + 8 + \frac{4}{e} - 16}}{4} = \sqrt{e},$$

$$\text{所以 } t = x_2^2 \in [e, +\infty).$$

$$\text{令 } g(t) = \frac{1}{t} - t + 2\ln t, t \in [e, +\infty),$$

$$\text{则 } g'(t) = -\frac{1}{t^2} - 1 + \frac{2}{t} = -\frac{t^2 - 2t + 1}{t^2} =$$

$$-\frac{(t-1)^2}{t^2} < 0 \text{ 在 } [e, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

$$\text{所以 } g(t) = \frac{1}{t} - t + 2\ln t \text{ 在 } [e, +\infty) \text{ 上单}$$

调递减,

$$\text{故 } g(t)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e} - e + 2,$$

$$\text{即 } f(x_2) - f(x_1) \text{ 的最大值为 } \frac{1}{e} - e + 2.$$

6-1. B 【解析】对函数 $f(x)$ 求导可得,

$$f'(x) = e^x + \cos x - 1, \text{ 记 } g(x) = f'(x), \text{ 则}$$

$$g'(x) = e^x - \sin x, \text{ 当 } x \in [-\pi, 0] \text{ 时, } e^x > 0,$$

$$\sin x \leq 0, \text{ 则 } e^x - \sin x > 0, \text{ 当 } x \in (0, +\infty)$$

$$\text{时, } e^x > 1, \sin x \in [-1, 1], \text{ 则 } e^x - \sin x > 0,$$

$$\text{所以在 } [-\pi, +\infty) \text{ 上, } e^x > \sin x, \text{ 所以}$$

$$g'(x) > 0, \text{ 所以 } f'(x) \text{ 单调递增. 又}$$

$$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} + \cos \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} - 1 < 0,$$

$$f'(0) = e^0 + \cos 0 - 1 = 1 + 1 - 1 > 0, \text{ 所以必存}$$

$$\text{在 } x_0 \in [-\pi, 0) \text{ 使得 } f'(x_0) = 0, \text{ 于是}$$

$$f(x) \text{ 在 } [-\pi, x_0) \text{ 上单调递减, 在 } (x_0,$$

$$+\infty) \text{ 上单调递增, 又 } f(0) = 0, f(-\pi) =$$

$$e^{-\pi} + \sin(-\pi) + \pi - 1 = \frac{1}{e^{\pi}} + \pi - 1 > 0, \text{ 所以}$$

$$f(x) \text{ 在区间 } (-\pi, x_0) \text{ 上必存在 1 个零点.}$$

$$\text{综上, 函数 } f(x) \text{ 在区间 } [-\pi, +\infty) \text{ 上有 2}$$

$$\text{个零点. 故选 B.}$$



6-2. ABD

【解析】由题意得

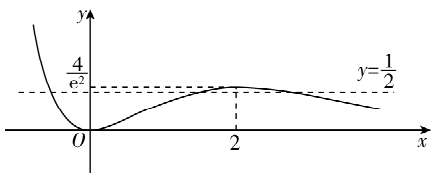
$$f'(x) = \frac{x(2-x)}{e^x}.$$

A. 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 故函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值, $f(x)_{\text{极小}} = f(0) = 0$, A 正确.

B. 当 $x > 2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 又 $2 < e < 3$, 故 $f(e) > f(3)$, B 正确.

C. 由以上分析可得在 $[1, 3]$ 上, $f(x)_{\text{max}} = f(2) = \frac{4}{e^2}$, 故若 $f(x) \leq m$ 在 $[1, 3]$ 上恒成立, 则 $m \geq \frac{4}{e^2}$, C 错误.

D. 由以上分析可作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



可知 $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ 的图象与直线 $y = \frac{1}{2}$ 有三个交点, 故函数 $h(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ 有三个零点, D 正确. 故选 ABD.

6-3. 【解】 (1) $F(x) = \frac{a}{2}(x-1)^2 - x + \ln x$,

定义域为 $(0, +\infty)$,

则 $F'(x) = a(x-1) - 1 + \frac{1}{x} =$

$$\frac{ax^2 - (a+1)x + 1}{x} = \frac{a\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-1)}{x}.$$

当 $a=1$ 时, $F'(x) \geq 0$, 当且仅当 $x=1$ 时, $F'(x) = 0$,

故 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 无极值点;

当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$, 则 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $\left(1, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在



$\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增,

故 $F(x)$ 的极大值点为 $x=1$, 极小值点为

$$x = \frac{1}{a};$$

当 $a > 1$ 时, $0 < \frac{1}{a} < 1$, 则 $F(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上

单调递增, 在 $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$ 上单调递减, 在 $(1,$

$+\infty)$ 上单调递增,

故 $F(x)$ 的极大值点为 $x = \frac{1}{a}$, 极小值点

为 $x=1$.

综上, 当 $0 < a < 1$ 时, $F(x)$ 的极大值点为

$x=1$, 极小值点为 $x = \frac{1}{a}$; 当 $a=1$ 时,

$F(x)$ 无极值点; 当 $a > 1$ 时, $F(x)$ 的极大

值点为 $x = \frac{1}{a}$, 极小值点为 $x=1$.

(2) 当 $1 < a < e$ 时, $F(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调

递增, 在 $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$

上单调递增,

所以 $F(x)$ 的极小值 $F(1) = -1 < 0$, $F(x)$

的极大值 $F\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}-1\right)^2 - \frac{1}{a} +$

$$\ln \frac{1}{a} = \frac{a}{2} - \frac{1}{2a} - \ln a - 1.$$

设 $h(a) = \frac{a}{2} - \frac{1}{2a} - \ln a - 1$, 其中 $a \in (1,$

$e)$,

$$\text{则 } h'(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{a} = \frac{a^2 - 2a + 1}{2a^2} =$$

$$\frac{(a-1)^2}{2a^2} > 0,$$

所以 $h(a)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增,

$$\text{所以 } h(a) < h(e) = \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} - 2 < 0,$$

$$\text{即 } F\left(\frac{1}{a}\right) < 0.$$

因为 $F(4) = \frac{a}{2}(4-1)^2 - 4 + \ln 4 > \frac{1}{2} \times 9 -$

$$4 + \ln 4 = \ln 4 + \frac{1}{2} > 0,$$



所以有且仅有 1 个 $x_0 \in (1, 4)$, 使得

$$F(x_0) = 0,$$

故当 $1 < a < e$ 时, $F(x)$ 有且仅有 1 个零点.

6-4. 【解】 (1) $f'(x) = a \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{x} =$

$$\frac{x-a}{x^2}, x > 0.$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < a$,

令 $f'(x) > 0$, 得 $x > a$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 由方程 $f(x) = ax^2 + \frac{a}{x}$ 得 $\ln x - ax^2 -$

$$2 = 0, \text{ 令 } g(x) = \ln x - ax^2 - 2, \text{ 则方程}$$

$$f(x) = ax^2 + \frac{a}{x} \text{ 有两个不同的实数根等价}$$

于函数 $g(x) = \ln x - ax^2 - 2$ 有两个零点.

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1-2ax^2}{x}, x > 0.$$

① 当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 最多只有一个零点, 不符合题意.

② 当 $a > 0$ 时, 由 $g'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$,

当 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2a}}$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在

$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 上单调递增, 当 $x > \frac{1}{\sqrt{2a}}$ 时,

$g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}, +\infty\right)$ 上单调递

减, 所以 $x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ 是 $g(x)$ 的极大值点, 极

大值 $g\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) = \ln \frac{1}{\sqrt{2a}} - \frac{5}{2}.$

(i) 若 $a \geq \frac{1}{2e^5}$, 则 $g(x) \leq g\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) \leq 0$,

$g(x)$ 最多只有一个零点, 不符合题意.

(ii) 若 $a < \frac{1}{2e^5}$, 则 $g\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right) > 0$, 且 $\frac{1}{\sqrt{2a}} >$



$$e^{\frac{5}{2}} > 1, g(1) = -a - 2 < 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 内有一个零点.

$$\text{令 } h(x) = \ln x - x + 1, \text{ 则 } h'(x) = \frac{1}{x} - 1,$$

$$x > 0.$$

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增;

当 $x > 1$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $h(x) \leq h(1) = 0$, 故 $\ln x \leq x - 1$, 当且仅当 $x = 1$ 时等号成立.

$$\text{所以 } g\left(\frac{1}{a}\right) = \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a} - 2 < \frac{1}{a} - 1 - \frac{1}{a} - 2 = -3 < 0.$$

又 $\frac{1}{a} > \frac{1}{\sqrt{2a}}$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}, \frac{1}{a}\right)$ 内有一个零点.

综上所述, 当 $0 < a < \frac{1}{2e^5}$ 时, $g(x)$ 有两个零

点, 即方程 $f(x) = ax^2 + \frac{a}{x}$ 有两个不同的

实数根, 故 a 的取值范围为 $\left(0, \frac{1}{2e^5}\right)$.

$$\mathbf{7-1. (1) 【解】} f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1},$$

$$x > -1.$$

当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 【证明】当 $x \in [2, +\infty)$ 时, 要证

$$\frac{g(x)}{x(x-1)} > 2, \text{ 即证 } g(x) - 2x(x-1) > 0.$$

$$\text{令 } h(x) = g(x) - 2x(x-1) = e^x - 1 - 2x(x-1), \text{ 则 } h'(x) = e^x - 4x + 2.$$

$$\text{设 } I(x) = h'(x) = e^x - 4x + 2,$$

$$\text{则 } I'(x) = e^x - 4 \geq e^2 - 4 > 0,$$

即 $I(x) = h'(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{所以 } h'(x) \geq h'(2) = e^2 - 6 > 0,$$



所以 $h(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(x) \geq h(2) = e^2 - 1 - 2 \times 2 \times 1 = e^2 - 5 > 0$ 恒成立,

所以当 $x \in [2, +\infty)$ 时, $\frac{g(x)}{x(x-1)} > 2$.

7-2. (1) 【解】由题知 $f(x)$ 的定义域为

$$(0, +\infty), f'(x) = \frac{1}{x} + a.$$

若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值, 则 $f'(1) = 1 + a = 0$, 得 $a = -1$.

检验, 此时 $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, 列表如下:

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	递增 ↗	极大值	递减 ↘

则函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 符合题意, 所以 $a = -1$.

(2) 【解】当 $a < 0$ 时, 由 $f'(x) = \frac{1}{x} + a =$

$$\frac{ax+1}{x} = 0, \text{ 可得 } x = -\frac{1}{a}.$$

①当 $0 < -\frac{1}{a} \leq 1$, 即 $a \leq -1$ 时, 对任意的

$x \in [1, 2]$, $f'(x) \leq 0$ 且 $f'(x)$ 不恒为零,

所以函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减, 则

$$f(x)_{\max} = f(1) = a;$$

②当 $1 < -\frac{1}{a} < 2$, 即 $-1 < a < -\frac{1}{2}$ 时,

若 $1 < x < -\frac{1}{a}$, 则 $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$

单调递增,

若 $-\frac{1}{a} < x < 2$, 则 $f'(x) < 0$, 此时函数 $f(x)$

单调递减,

$$\text{所以 } f(x)_{\max} = f\left(-\frac{1}{a}\right) = \ln\left(-\frac{1}{a}\right) -$$

$$1 = -1 - \ln(-a);$$

③当 $-\frac{1}{a} \geq 2$, 即 $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ 时, 对任意的

$x \in [1, 2]$, $f'(x) \geq 0$ 且 $f'(x)$ 不恒为零,

函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 则



$$f(x)_{\max} = f(2) = 2a + \ln 2.$$

综上所述, $f(x)_{\max} =$

$$\begin{cases} a, a \leq -1, \\ -1 - \ln(-a), -1 < a < -\frac{1}{2}, \\ 2a + \ln 2, -\frac{1}{2} \leq a < 0. \end{cases}$$

(3) 【证明】当 $a = -1$ 时, $f(x) = \ln x - x$,

要证 $f(x) < e^x - x - 2$, 只需证 $e^x - \ln x - 2 > 0$.

设 $g(x) = e^x - \ln x - 2$, 其中 $x > 0$, 则

$$g'(x) = e^x - \frac{1}{x},$$

令 $h(x) = g'(x)$, 则 $h'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$,

所以函数 $g'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $g'(1) = e - 1 > 0$, $g'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0$,

所以存在唯一的 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得

$$g'(x_0) = e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0, \text{ 即 } x_0 = -\ln x_0,$$

当 $0 < x < x_0$ 时, $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减;

当 $x > x_0$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增,

所以 $g(x) \geq g(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - 2 = \frac{1}{x_0} +$

$$x_0 - 2 > 2\sqrt{\frac{1}{x_0} \cdot x_0} - 2 = 0,$$

所以 $e^x - \ln x - 2 > 0$, 故 $f(x) < e^x - x - 2$.

7-3. (1) 【解】 $f(x)$ 的定义域为 $(0,$

$$+\infty), f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = -\frac{x^2 - ax + 1}{x^2}.$$

(i) 若 $a \leq 2$, 则 $f'(x) \leq 0$, 当且仅当 $a = 2, x = 1$ 时 $f'(x) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减.

(ii) 若 $a > 2$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x =$

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \text{ 或 } x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$



当 $x \in \left(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ 时,
 $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$,
 $\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$ 单调递减, 在
 $\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ 单调递增.

(2) 【证明】由(1)知, $f(x)$ 存在两个极值点当且仅当 $a > 2$.

由于 $f(x)$ 的两个极值点 x_1, x_2 满足 $x^2 - ax + 1 = 0$, 所以 $x_1 x_2 = 1$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $x_2 > 1$.

$$\begin{aligned} 1. \text{ 由于 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= -\frac{1}{x_1 x_2} - 1 + a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} \\ &= -2 + a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} \\ &= -2 + a \frac{-2 \ln x_2}{\frac{1}{x_2} - x_2}, \end{aligned}$$

所以 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$ 等价于 $\frac{1}{x_2} - x_2 + 2 \ln x_2 < 0$.

设函数 $g(x) = \frac{1}{x} - x + 2 \ln x$, 由(1)知,
 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 又 $g(1) = 0$,
从而当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x) < 0$.

所以 $\frac{1}{x_2} - x_2 + 2 \ln x_2 < 0$, 即 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

巩固练

1. B 【解析】由题意可知, 存在 $x \in [1, e]$, 使得 $m \leq f(x)$, 则 $m \leq f(x)_{\max}$.

$$\begin{aligned} \because f(x) &= x^2 - 2 \ln x, \therefore f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} \\ &= \frac{2(x-1)(x+1)}{x}. \end{aligned}$$

当 $x \in [1, e]$ 时, $f'(x) \geq 0$,



\therefore 函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增, 则

$$f(x)_{\max} = f(e) = e^2 - 2, \therefore m \leq e^2 - 2,$$

\therefore 实数 m 的取值范围是 $(-\infty, e^2 - 2]$.

故选 B.

2. C 【解析】 由 $y = \frac{x}{e^x}$, 得 $y' = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} =$

$$\frac{1-x}{e^x}, x \in [0, 2].$$

当 $0 \leq x < 1$ 时, $y' > 0$; 当 $1 < x \leq 2$ 时,

$$y' < 0.$$

\therefore 函数 $y = \frac{x}{e^x}$ 在 $[0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 2]$ 上单调递减.

\therefore 当 $x = 1$ 时, 函数取极大值 $\frac{1}{e}$,

又 \because 当 $x = 0$ 时, $y = 0$, 当 $x = 2$ 时,

$$y = \frac{2}{e^2},$$

\therefore 可知该函数在 $[0, 2]$ 上的最大值为

$$\frac{1}{e}. \text{ 故选 C.}$$

3. A 【解析】 因为 a, b 为正实数,

$$\text{所以 } f'(x) = 3ax^2 + b > 0,$$

所以 $f(x) = ax^3 + bx + 2$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,

所以函数 $f(x) = ax^3 + bx + 2$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1) = a + b + 2 = 4$, 即 $a + b =$

2. 所以 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上的最小值为

$$f(-1) = -(a + b) + 2 = 0.$$

4. B 【解析】 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,$

$$+\infty), f'(x) = \frac{1}{x} + 2 - \frac{a}{x^2}. \text{ 因为 } x = 1 \text{ 是}$$

$f(x)$ 的极值点, 所以 $f'(1) = 1 + 2 - a =$

$$3 - a = 0, \text{ 解得 } a = 3, \text{ 此时 } f'(x) = \frac{1}{x} +$$

$$2 - \frac{3}{x^2} = \frac{2x^2 + x - 3}{x^2} = \frac{(x-1)(2x+3)}{x^2} (x >$$

0), 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$,

$f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (1, +\infty)$,

$f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 所以 $x = 1$ 是



$f(x)$ 的极小值点, $a=3$ 符合题意.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} + 1 + 6 = 7 - \ln 2, f(2) =$$

$$\ln 2 + 4 + \frac{3}{2} = \ln 2 + \frac{11}{2}, \text{ 由于 } 7 - \ln 2 \approx$$

$$7 - 0.69 = 6.31, \ln 2 + \frac{11}{2} \approx 0.69 + 5.5 =$$

$$6.19, \text{ 所以 } f(x) \text{ 在区间 } \left[\frac{1}{2}, 2\right] \text{ 上的}$$

最大值为 $7 - \ln 2$. 故选 B.

5. **C** 【解析】 $f'(x) = x^2 + 2x$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -2$ 或 $x = 0$, 令 $f'(x) > 0$ 得 $x < -2$ 或 $x > 0$, 令 $f'(x) < 0$ 得 $-2 < x < 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递增, 在 $(-2, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值 $f(0) = -\frac{2}{3}$. 令 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$, 解得 $x = 0$ 或 $x = -3$. 若函数 $f(x)$ 在 $(a-1, a+5)$ 内存在最小值, 则 $-3 \leq a-1 < 0 < a+5$, 解得 $-2 \leq a < 1$. 故选 C.

6. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$ 【解析】 $f'(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x) = e^x \cos x$. 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x) \geq 0$, 仅有 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 故 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$, 最小值为 $f(0) = \frac{1}{2}$.

7. **B** 【解析】由题意知, $A\left(\frac{1}{2}\ln a, a\right)$, $B\left(e^{a-\frac{1}{2}}, a\right)$, 其中 $e^{a-\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}\ln a$, 且 $a > 0$, 所以 $|AB| = e^{a-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\ln a$. 令 $h(x) =$



$e^{x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \ln x, x > 0$, 则 $h'(x) = e^{x-\frac{1}{2}} -$

$\frac{1}{2x}$, 令 $h'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2}$, 所以当

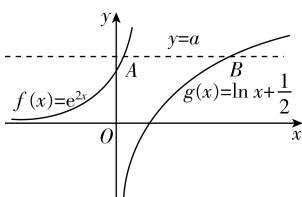
$0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时,

$h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调

递减, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 所以

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $|AB|_{\min} = 1 - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = 1 +$

$\frac{\ln 2}{2}$, 故选 B.



8. A 【解析】因为函数 $f(x) = \frac{ax^2}{2e} - \ln |ax|$

($a > 0$) 的定义域为 $\{x \mid x \neq 0\}$, 且

$$f(-x) = \frac{a(-x)^2}{2e} - \ln |-ax| = \frac{ax^2}{2e} -$$

$\ln |ax| = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为偶函

数, 故函数 $f(x)$ 有 4 个零点等价于当

$x > 0$ 时, $f(x)$ 有 2 个零点. 当 $x > 0$ 时,

$$f(x) = \frac{ax^2}{2e} - \ln ax \quad (a > 0), \text{ 则 } f'(x) =$$

$$\frac{2ax}{2e} - \frac{a}{ax} = \frac{ax}{e} - \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - e}{ex}. \text{ 由 } f'(x) =$$

0 得 $x = \sqrt{\frac{e}{a}}$, 当 $x > \sqrt{\frac{e}{a}}$ 时, $f'(x) >$

0, 当 $0 < x < \sqrt{\frac{e}{a}}$ 时, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$

在 $(0, \sqrt{\frac{e}{a}})$ 上单调递减, 在

$(\sqrt{\frac{e}{a}}, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$

有极小值 $f(\sqrt{\frac{e}{a}})$. 又当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$f(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 要

使函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有 2 个零



点, 只需 $f\left(\sqrt{\frac{e}{a}}\right) < 0$. $f\left(\sqrt{\frac{e}{a}}\right) =$

$$\frac{a \cdot \frac{e}{a}}{2e} - \ln\left(a \cdot \sqrt{\frac{e}{a}}\right) = \frac{1}{2} - \ln \sqrt{ae} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln ae < 0, \text{ 解得 } a > 1, \text{ 所以 } a \text{ 的}$$

取值范围是 $(1, +\infty)$. 故选 A.

9. $-\frac{1}{2}$ 【解析】由 $f(x_1) = g(x_2)$ 得 $x_2 =$

$$e^{x_1} - \cos x_1 - 2a, \therefore x_2 - x_1 = e^{x_1} - x_1 -$$

$$\cos x_1 - 2a. \text{ 设 } F(x) = f(x) - g(x) = e^x -$$

$$\cos x - 2a - x, x_2 - x_1 \text{ 的最小值为 } 1, \text{ 即函}$$

数 $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的最小值为 1.

$$F'(x) = e^x - 1 + \sin x, \text{ 当 } x \in [0, \pi] \text{ 时,}$$

$$\sin x \geq 0, e^x - 1 \geq 0, \text{ 则 } F'(x) \geq 0, \text{ 所以}$$

函数 $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增, 所以

$$F(x)_{\min} = F(0) = -2a = 1, \text{ 解得}$$

$$a = -\frac{1}{2}.$$

10. 【解】 $f'(x) = \frac{-ax^2 + (2a-1)x + 1 - a}{e^x} =$

$$\frac{-(ax+1-a)(x-1)}{e^x}.$$

当 $a=0$ 时, 令 $f'(x)=0$, 得 $x=1$.

在 $[0, 1)$ 上, 有 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

在 $(1, 2]$ 上, 有 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减.

又 $f(0) = 0, f(2) = \frac{2}{e^2}$, 故函数 $f(x)$

在 $[0, 2]$ 上的最小值为 $f(0) = 0$, 结论不成立.

当 $a \neq 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 1$,

$$x_2 = 1 - \frac{1}{a}.$$

若 $a < 0$, 则 $f(0) = a < 0$, 结论不成立.

若 $0 < a \leq 1$, 则 $1 - \frac{1}{a} \leq 0$.

在 $[0, 1)$ 上, 有 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

在 $(1, 2]$ 上, 有 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$



单调递减.

$$\text{只需} \begin{cases} f(0) \geq \frac{1}{e^2}, \\ f(2) \geq \frac{1}{e^2}, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a \geq \frac{1}{e^2}, \\ a \geq -\frac{1}{5}, \end{cases}$$

所以 $\frac{1}{e^2} \leq a \leq 1$.

若 $a > 1$, 则 $0 < 1 - \frac{1}{a} < 1$, 函数 $f(x)$ 在

$x = 1 - \frac{1}{a}$ 处有极小值,

$$\text{只需} \begin{cases} f\left(1 - \frac{1}{a}\right) \geq \frac{1}{e^2}, \\ f(2) \geq \frac{1}{e^2}, \end{cases}$$

$$\text{得} \begin{cases} 2a - 1 \geq e^{-1 - \frac{1}{a}}, \\ a \geq -\frac{1}{5}. \end{cases}$$

因为 $2a - 1 > 1$, $e^{-1 - \frac{1}{a}} < 1$, 所以 $a > 1$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是

$$\left[\frac{1}{e^2}, +\infty \right).$$

11. 【解】 (1) 当 $m = -1$ 时, $F(x) = \ln x -$

$$\frac{x-1}{2x} = \ln x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} (x > 0),$$

$$\text{则 } F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} = \frac{2x-1}{2x^2}.$$

$$\text{令 } F'(x) = 0, \text{ 解得 } x = \frac{1}{2}.$$

当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 在

$\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减;

当 $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 时, $F'(x) > 0$, $F(x)$

在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增,

所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $F(x)$ 取得最小值

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

$$\text{因为 } \frac{1}{2} - \ln 2 = \ln e^{\frac{1}{2}} - \ln 2 < 0,$$

所以 $F(x)_{\min} < 0$.



$$\text{又 } F\left(\frac{1}{e^2}\right) = -2 + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 5}{2} > 0,$$

$$F(e) = 1 + \frac{1}{2e} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e} + \frac{1}{2} > 0,$$

$$\text{所以 } F\left(\frac{1}{e^2}\right) \cdot F\left(\frac{1}{2}\right) < 0,$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) \cdot F(e) < 0,$$

$$\text{所以 } F(x) \text{ 分别在区间 } \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{2}, e\right) \text{ 上各存在一个零点, 则函数}$$

$F(x)$ 存在两个零点.

$$(2) \text{ 令 } h(x) = f(x) - g(x) = \ln x -$$

$$\frac{mx-m}{2x}, x > 0,$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{m}{2x^2} = \frac{2x-m}{2x^2}.$$

$$\text{①当 } m \leq 2 \text{ 时, } h'(x) \geq 0 \text{ 在 } [1, +\infty)$$

上恒成立, 当且仅当 $m=2, x=1$ 时等

号成立,

$$\text{所以函数 } h(x) = \ln x - \frac{mx-m}{2x} \text{ 在 } [1,$$

$+\infty)$ 上单调递增.

$$\text{又 } h(1) = \ln 1 - \frac{m \times 1 - m}{2 \times 1} = 0, \text{ 所以}$$

$h(x) \geq 0$ 对 $\forall x \in [1, +\infty)$ 恒成立. 故

$m \leq 2$ 不符合题意.

$$\text{②当 } m > 2 \text{ 时, 令 } h'(x) = \frac{2x-m}{2x^2} < 0, \text{ 得}$$

$$0 < x < \frac{m}{2};$$

$$\text{令 } h'(x) = \frac{2x-m}{2x^2} > 0, \text{ 得 } x > \frac{m}{2}.$$

所以函数 $h(x)$ 在 $\left[1, \frac{m}{2}\right)$ 上单调递

减, 在 $\left(\frac{m}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增,

$$\text{所以 } h\left(\frac{m}{2}\right) < h(1) = 0, \text{ 即当 } m > 2 \text{ 时,}$$

存在 $x_0 > 1$, 使 $h(x_0) < 0$,

即 $f(x_0) < g(x_0)$.

故 $m > 2$ 符合题意.

综上所述, 实数 m 的取值范围是 $(2,$



$+\infty$).

12. $\left(\frac{1}{e}, \frac{4}{e^2}\right]$ **【解析】**函数 $y=f(x)$ 有

唯一的零点 2,

由题意知,函数 $y=g(x)$ 的零点 x_0 满足 $|x_0-2|<1$, 即 $1<x_0<3$.

因为 $x_0^2 - ae^{x_0} = 0$, 所以 $a = \frac{x_0^2}{e^{x_0}}$.

设 $h(x) = \frac{x^2}{e^x} (1 < x < 3)$,

则 $h'(x) = \frac{2x-x^2}{e^x}$.

当 $x \in (1, 2)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增;

当 $x \in (2, 3)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减.

所以在区间 $[1, 3]$ 上, $h(x)_{\max} =$

$$h(2) = \frac{4}{e^2},$$

$$\text{又 } h(1) = \frac{1}{e}, h(3) = \frac{9}{e^3},$$

所以实数 a 的取值范围为

$$\left(\frac{1}{e}, \frac{4}{e^2}\right].$$

1.3.4 导数的应用举例

易错记

1-1. C **【解析】**由题意可知这个无盖方盒的共顶点的三条棱长分别为 $x, 6-2x, 6-2x$, 显然 $0 < x < 3$,

因此无盖方盒的容积 $V = x(6-2x)(6-2x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$.

所以 $V' = 12x^2 - 48x + 36 = 12(x-1) \cdot (x-3)$,

当 $0 < x < 1$ 时, $V' > 0$, 函数单调递增;

当 $1 < x < 3$ 时, $V' < 0$, 函数单调递减.

所以当 $x = 1$ 时, 函数 $V = 4x^3 - 24x^2 + 36x$ 有最大值, 故选 C.

1-2. 【解】(1) 由题意可得

$$\begin{cases} 100a + \frac{101}{5} - b \ln 10 + b \ln 10 = 19.2, \\ 900a + \frac{303}{5} - b \ln 30 + b \ln 10 = 50.5, \end{cases}$$



$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{100}, \\ b = 1, \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{100}x^2 + \frac{101}{50}x - \ln x + \ln 10 \quad (x \geq 10).$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知 } T(x) = f(x) - x = -\frac{1}{100}x^2 + \frac{51}{50}x - \ln x + \ln 10, x \geq 10,$$

$$T'(x) = -\frac{1}{50}x + \frac{51}{50} - \frac{1}{x} = -\frac{(x-1)(x-50)}{50x}.$$

$\therefore x \geq 10$, \therefore 当 $x \in [10, 50)$ 时, $T'(x) > 0$, $T(x)$ 单调递增; 当 $x \in (50, +\infty)$ 时, $T'(x) < 0$, $T(x)$ 单调递减, \therefore 当 $x = 50$ 时, $T(x)$ 取得极大值, 也是最大值,

$$T(50) = -\frac{1}{100} \times 50^2 + \frac{51}{50} \times 50 - \ln 50 + \ln 10 \approx 24.4.$$

\therefore 该景点改造升级后旅游利润的最大值约为 24.4 万元.

题型诀

1-1. B 【解析】设圆柱的底面半径为 r ,

则高为 $6-2\pi r$, 可得 $0 < r < \frac{3}{\pi}$,

则该圆柱的体积 $V = \pi r^2 \cdot (6-2\pi r) = -2\pi^2 r^3 + 6\pi r^2$,

则 $V' = -6\pi^2 r^2 + 12\pi r = -6\pi r(\pi r - 2)$.

令 $V' > 0$, 解得 $0 < r < \frac{2}{\pi}$;

令 $V' < 0$, 解得 $\frac{2}{\pi} < r < \frac{3}{\pi}$,

所以当 $r = \frac{2}{\pi}$ 时, 圆柱体积取得最大值,

此时圆柱的高为 $6-2\pi \times \frac{2}{\pi} = 2$. 故选 B.

1-2. C 【解析】设圆锥的高为 h , 则圆

柱的高为 $3h$, 底面圆半径 $r = \sqrt{36-h^2}$

($0 < h < 6$), 则该模型的体积 $V = \pi r^2 \cdot 3h +$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{10}{3}h(36-h^2)\pi = \frac{10}{3}(-h^3 +$$



$36h) \pi$. 令 $f(x) = -x^3 + 36x$ ($0 < x < 6$), 则 $f'(x) = -3x^2 + 36$, 由 $f'(x) = 0$ 得 $x = \pm 2\sqrt{3}$. 当 $0 < x < 2\sqrt{3}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $2\sqrt{3} < x < 6$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 2\sqrt{3})$ 上单调递增, 在 $(2\sqrt{3}, 6)$ 上单调递减, 当 $x = 2\sqrt{3}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 即当 $h = 2\sqrt{3}$ 时, $V_{\max} = 160\sqrt{3}\pi$, 故选 C.

1-3. A 【解析】设圆柱的底面半径与高分别为 r 分米, h 分米, 则该几何体的表面积 $S = 4\pi r^2 + 2\pi rh = 12\pi$, 则 $h = \frac{6-2r^2}{r}$ ($1 < r < \sqrt{3}$), 所以该几何体的体积 $V = V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = \frac{2\pi}{3}(9r - r^3)$ ($1 < r < \sqrt{3}$), 则 $V'(r) = \frac{2\pi}{3}(9 - 3r^2)$. 当 $1 < r < \sqrt{3}$ 时, $V'(r) > 0$, 则 $V(r)$ 在 $(1, \sqrt{3})$ 上单调递增, 故 V 的取值范围是 $\left(\frac{16\pi}{3}, 4\sqrt{3}\pi\right)$. 故选 A.

2-1. 25 【解析】由题可知池底面积为 $\frac{2\,500}{2} = 1\,250(\text{m}^2)$, 其为定值, 即池底维修费用为定值, 则泳池维修费用由池壁维修费用决定. 又 x 表示较短池壁长, 则 $0 < x < \frac{2\,500}{2x}$, 即 $0 < x < 25\sqrt{2}$, 则池壁的总维修费用表达式为 $2 \times \frac{4k}{25}x + \frac{2\,500k}{x^2}$. 设 $f(x) = \frac{8k}{25}x + \frac{2\,500k}{x^2}$, $0 < x < 25\sqrt{2}$, 则 $f'(x) = \frac{8k}{25} - \frac{5\,000k}{x^3} = \frac{8kx^3 - 125\,000k}{25x^3}$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 25$, 则当 $f'(x) > 0$ 时, $25 < x < 25\sqrt{2}$, 当 $f'(x) < 0$ 时, $0 < x < 25$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 25)$ 上单调递减, 在 $(25, 25\sqrt{2})$ 上单调递增, 所以当 $x = 25$ 时, $f(x)$ 取最小值, 即泳池的总维修费用最低.



2-2. 【解】(1) 由题意知, 需要新建的高压

线塔为 $\frac{16}{x}-1 (0 < x \leq 16, \frac{16}{x}-1 \in \mathbf{N}_+)$ 座.

所以 $y = 2 \left(\frac{16}{x} - 1 \right) + \frac{16}{x} \times 4x [\ln(x + 0.48) - 0.125]$,

即 $y = \frac{32}{x} + 64 \ln(x + 0.48) - 10 (0 < x \leq 16,$

$\frac{16}{x} - 1 \in \mathbf{N}_+)$.

(2) 由 (1) 得 $y' = -\frac{32}{x^2} + \frac{64}{x+0.48} =$

$$\frac{32(2x^2 - x - 0.48)}{x^2(x+0.48)},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0.8$ 或 $x = -0.3$ (舍去).

由 $y' < 0$, 得 $0 < x < 0.8$; 由 $y' > 0$, 得 $0.8 < x \leq 16$,

所以函数在区间 $(0, 0.8)$ 上单调递减, 在区间 $(0.8, 16)$ 上单调递增.

所以当 $x = 0.8$ 时, 函数取得最小值,

$$\text{且 } y_{\min} = \frac{32}{0.8} + 64 \ln 1.28 - 10 = 30 +$$

$$64(7 \ln 2 - 2 \ln 10) \approx 44.72,$$

此时应建高压线塔为 $\frac{16}{0.8} - 1 = 19$ (座).

故需建 19 座高压线塔可使得余下的工程费用最低, 且为 44.72 万元.

3-1. B 【解析】 设投入 B 商品 x 千元

$(0 \leq x \leq 5)$, 则投入 A 商品 $(5-x)$ 千元,

所获得的收益为 $S(x)$ 千元, 则 $S(x) =$

$$2(5-x) + 5 \ln(2x+1) = 5 \ln(2x+1) - 2x + 10$$

$$(0 \leq x \leq 5), S'(x) = \frac{10}{2x+1} - 2.$$

当 $0 \leq x < 2$ 时, $S'(x) > 0$, 函数 $S(x)$ 在 $[0, 2)$ 上单调递增;

当 $2 < x \leq 5$ 时, $S'(x) < 0$, 函数 $S(x)$ 在 $(2, 5]$ 上单调递减.

所以当 $x = 2$ 时, 函数 $S(x)$ 取得最大值

$$S(2) = 6 + 5 \ln 5,$$

所以当投入 B 商品 2 千元, 投入 A 商品 3 千元时, 总收益最大.



3-2. 【解】(1) 设 $w(x) = kx + b$ ($k \neq 0$). 由

$$\begin{cases} w(1) = 57, \\ w(10) = 120, \end{cases} \quad \text{可得} \quad \begin{cases} k+b = 57, \\ 10k+b = 120, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$$\begin{cases} k = 7, \\ b = 50, \end{cases} \quad \text{所以 } w(x) = 7x + 50 \ (x > 0), \text{ 依题}$$

$$\begin{aligned} \text{意得, } F(x) &= xG(x) - 50 - 7x = x \left(-\frac{7}{x^2} + \frac{20 \ln x}{x} + \frac{84}{x} + 4 \right) - 50 - 7x \\ &= -\frac{7}{x} + 20 \ln x - 3x + 34 \ (x > 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 由 (1) 得, } F(x) &= -\frac{7}{x} + 20 \ln x - 3x + 34 \ (x > 0), \text{ 则 } F'(x) = \frac{7}{x^2} + \frac{20}{x} - 3 \\ &= \frac{-3x^2 + 20x + 7}{x^2} = -\frac{(3x+1)(x-7)}{x^2}. \end{aligned}$$

令 $F'(x) > 0$, 得 $0 < x < 7$, 令 $F'(x) < 0$, 得 $x > 7$, 所以 $F(x)$ 在 $(0, 7)$ 上单调递增, 在 $(7, +\infty)$ 上单调递减,

所以当 $x = 7$ 时, $F(x)_{\max} = F(7) = 20 \ln 7 + 12 \approx 20 \times 1.95 + 12 = 51$, 即当年产量为 7 百件时, 该企业利润最大为 51 万元.

巩固练

1. C 【解析】 设底面边长为 x , 则表面积

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{4\sqrt{3}}{x}V \ (x > 0), \text{ 故 } S' = \frac{\sqrt{3}}{x^2}(x^3 - 4V). \\ \text{令 } S' &= 0, \text{ 得 } x = \sqrt[3]{4V}, \text{ 可判断当 } x = \sqrt[3]{4V} \text{ 时, } S \text{ 取得最小值.} \end{aligned}$$

2. 8 【解析】 设当莲藕种植量为 x 万千克时, 销售利润为 $g(x)$ 万元, 则

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{6}x^3 + ax^2 + x - 2 - x = -\frac{1}{6}x^3 + ax^2 - 2 \ (0 \leq x \leq 10). \end{aligned}$$

$$\because g(3) = -\frac{1}{6} \times 3^3 + a \times 3^2 - 2 = \frac{23}{2}, \therefore a =$$

$$2, \text{ 即 } g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 - 2 \ (0 \leq x \leq$$

$$10), \text{ 则 } g'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x = -\frac{1}{2}x(x - 8).$$

当 $x \in [0, 8)$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in (8,$



10] 时, $g'(x) < 0$, $\therefore g(x)$ 在 $[0, 8)$ 上单调递增, 在 $(8, 10]$ 上单调递减, 故当 $x = 8$ 时, $g(x)$ 取得最大值, 故要使销售利润最大, 每年需种植莲藕 8 万千克.

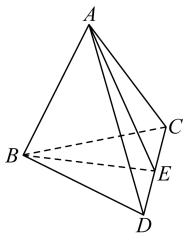
3. 【解】(1) 设产品单价为 a 元, 因为产品单价的平方与产品件数 x 成反比, 即 $a^2 x = k$, 由题知 $k = 50^2 \times 100 = 250\,000$, 所以 $a = \frac{500}{\sqrt{x}}$, 所以总利润 $y = 500\sqrt{x} - \frac{2}{75}x^3 - 1\,200 (x \geq 1)$.

(2) 由 (1) 得 $y = 500\sqrt{x} - \frac{2}{75}x^3 - 1\,200$

$(x \geq 1)$, 则 $y' = \frac{250}{\sqrt{x}} - \frac{2}{25}x^2$, 令 $y' = 0$, 得

$x = 25$. 当 $x \in [1, 25)$ 时, $y' > 0$, 函数单调递增; 当 $x \in (25, +\infty)$ 时, $y' < 0$, 函数单调递减, 所以当 $x = 25$ 时, y 取得极大值且为最大值, 即当 x 定为 25 件时, 总利润最大.

4. A 【解析】如图所示, 设 $AB = CD = a (a > 0)$, $AC = AD = BD = BC = 2$.



过点 A 作 $AE \perp CD$ 于点 E , 连接 BE , 则

$AE = \sqrt{4 - \frac{a^2}{4}} = BE$. 又 $AB = a$, 所以

$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{4 - \frac{a^2}{2}}$, 所以 $V_{A-BCD} =$

$\frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{4 - \frac{a^2}{2}} =$

$\frac{1}{6} \sqrt{4a^4 - \frac{a^6}{2}} (0 < a < 2\sqrt{2})$.

令 $f(a) = 4a^4 - \frac{a^6}{2} (0 < a < 2\sqrt{2})$, 则

$f'(a) = 16a^3 - 3a^5$, 令 $f'(a) = 0$, 得 $a =$

$\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (负根舍去). 当 $a \in \left(0, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$



时, $f'(a) > 0$, $f(a)$ 单调递增; 当 $a \in$

$\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, 2\sqrt{2}\right)$ 时, $f'(a) < 0$, $f(a)$ 单调

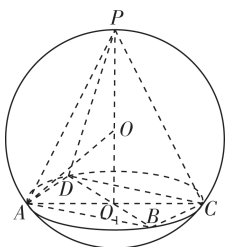
递减. 所以当 $a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时, 三棱锥的体

积最大, 最大值 $(V_{A-BCD})_{\max} = \frac{16\sqrt{3}}{27}$,

所以此三棱锥体积的取值范围是

$\left(0, \frac{16\sqrt{3}}{27}\right]$, 故选 A.

5. **A** 【解析】如图, 连接 AC, BD 交于点 O_1 , 则 O_1 为底面 $ABCD$ 的中心, 则 P, O, O_1 三点共线, 连接 PO_1, OA .



设正四棱锥的高为 $h (0 < h < 2)$, 则 $OO_1 =$

$h-1$, 则 $O_1A = \sqrt{1-(h-1)^2}$, $AB = \sqrt{2} \cdot$

$\sqrt{1-(h-1)^2}$, 所以正四棱锥 $P-ABCD$

的体积 $V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \times 2[1-(h-1)^2] \times$

$h = \frac{2}{3}(-h^3 + 2h^2) (0 < h < 2)$.

令 $f(h) = \frac{2}{3}(-h^3 + 2h^2) (0 < h < 2)$,

则 $f'(h) = \frac{2}{3}(-3h^2 + 4h) = \frac{2}{3}h(-3h +$

$4)$, 当 $0 < h < \frac{4}{3}$ 时, $f'(h) > 0$, $f(h)$ 单调

递增, 当 $\frac{4}{3} < h < 2$ 时, $f'(h) < 0$, $f(h)$ 单

调递减, 所以当 $h = \frac{4}{3}$ 时, $f(h)$ 取得极

大值也是最大值, 即 V_{P-ABCD} 最大. 故

选 A.

6. **30 千米/时** 【解析】由题意可得 100

千米的航程需要 $\frac{100}{x}$ 小时, 故总费用

$$f(x) = \left(\frac{1}{100}x^3 + x + 540\right) \cdot \frac{100}{x},$$



即 $f(x) = x^2 + 100 + \frac{54\,000}{x} (x > 0)$, 故

$$f'(x) = 2x - \frac{54\,000}{x^2} = \frac{2(x^3 - 27\,000)}{x^2}.$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 30$.

故当 $0 < x < 30$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x > 30$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

故当 $x = 30$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 即使航行的总费用最少, 航速应为 30 千米/时.

7. 6 cm 4 cm 【解析】 设底面的长为

$2x$ cm, 则由条件可得宽为 x cm, 高为

$$\frac{72}{2x^2} = \frac{36}{x^2} \text{ (cm)},$$

所以表面积 $S(x) = 4x^2 + \frac{36}{x^2} \cdot x \cdot 2 +$

$$\frac{36}{x^2} \cdot 2x \cdot 2 = 4x^2 + \frac{216}{x}, x > 0, \text{ 则 } S'(x) =$$

$$8x - \frac{216}{x^2}.$$

令 $S'(x) < 0$, 解得 $0 < x < 3$; 令 $S'(x) > 0$, 解得 $x > 3$.

所以 $S(x)$ 在 $(0, 3)$ 上单调递减, 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增.

故当 $x = 3$ 时, $S(x)$ 取得最小值, 即此时长为 6 cm, 宽为 3 cm, 高为 4 cm.

8. 【解】 (1) 由题意, $10 = \frac{a}{3-2} + 2 \times (3 -$

$$5)^2, \text{ 解得 } a = 2, \text{ 故 } g(x) = \frac{2}{x-2} + 2(x-5)^2 (2 < x < 5).$$

(2) 商场每日销售该商品所获得的利润 $h(x) = (x-2)g(x) = 2 + 2(x-5)^2 \cdot (x-2) (2 < x < 5)$,

$$\text{所以 } h'(x) = 4(x-5)(x-2) + 2(x-5)^2 = 6(x-3)(x-5).$$

列表得 $x, h'(x), h(x)$ 的变化情况:

x	$(2, 3)$	3	$(3, 5)$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	单调递增	极大值	单调递减



由表可得, $x=3$ 是函数 $h(x)$ 在区间 $(2,5)$ 上的极大值点,也是最大值点,此时该商场每日销售该商品所获得的利润最大.

9. 【解】(1) 延长 QP 交 AB 于点 E (图略), 则 $QE \perp AB$, 且 E 为 AB 的中点,

$$\text{所以 } AE = BE = QE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = 4,$$

由对称性可知, $PA = PB$.

① 若 $PQ = x$, 则 $0 < x < 4$, $PE = 4 - x$,

$$\text{在 Rt } \triangle PAE \text{ 中, } PA = \sqrt{PE^2 + AE^2} = \sqrt{(4-x)^2 + 16}, \text{ 所以 } L = PQ + 2PA = x + 2\sqrt{(4-x)^2 + 16} \quad (0 < x < 4).$$

② 若 $\angle PAB = \theta$, 则 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, 在

$$\text{Rt } \triangle PAE \text{ 中, } PA = \frac{AE}{\cos \theta} = \frac{4}{\cos \theta}, PE =$$

$$AE \tan \theta = 4 \tan \theta, \text{ 所以 } PQ = QE - PE = 4 - 4 \tan \theta, \text{ 所以 } L = PQ + 2PA = 4 - 4 \tan \theta + 2 \times$$

$$\frac{4}{\cos \theta} = 4 + 4 \times \frac{2 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right).$$

(2) 选取①中的函数关系式, $L = x +$

$$2\sqrt{(4-x)^2 + 16} \quad (0 < x < 4),$$

$$\text{记 } f(x) = x + 2\sqrt{(4-x)^2 + 16} \quad (0 < x < 4),$$

$$\text{则 } f'(x) = 1 + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{-2(4-x)}{\sqrt{(4-x)^2 + 16}} =$$

$$1 - \frac{2(4-x)}{\sqrt{(4-x)^2 + 16}}, \text{ 令 } f'(x) = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = 4 - \frac{4\sqrt{3}}{3}, x_2 = 4 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (舍去)}.$$

$$\text{当 } x \in \left(0, 4 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \text{ 时, } f'(x) < 0, f(x)$$

单调递减;

$$\text{当 } x \in \left(4 - \frac{4\sqrt{3}}{3}, 4\right) \text{ 时, } f'(x) > 0, f(x)$$

单调递增,

$$\text{所以当 } x = 4 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ 时, } f(x) \text{ 取得最小}$$

值, 即钢管总长度 L 取得最小值, 即当

$$PQ \text{ 的长度为 } 4 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ 时, 所用的钢管材}$$



料最省.

选取②中的函数关系式, $L = 4 + 4 \times$

$$\frac{2 - \sin \theta}{\cos \theta} \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4} \right), \text{记 } g(\theta) = \frac{2 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\left(0 < \theta < \frac{\pi}{4} \right), \text{则 } g'(\theta) = \frac{2 \sin \theta - 1}{\cos^2 \theta},$$

由 $g'(\theta) = 0$ 及 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 得, $\theta = \frac{\pi}{6}$,

当 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{6} \right)$ 时, $g'(\theta) < 0$, $g(\theta)$ 单调递减;

当 $\theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right)$ 时, $g'(\theta) > 0$, $g(\theta)$ 单调递增,

所以当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, $g(\theta)$ 取得最小值, 即

钢管总长度 L 取得最小值, 即当

$\angle PAB = \frac{\pi}{6}$ 时, 所用的钢管材料最省.